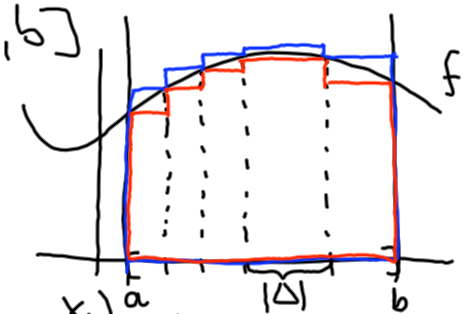
8 INTEGRÁLNÍ POČET

Motivace: $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $[a,b] \subset X$

f omezená na $[a,b]$



$[a,b]$ $\quad (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ – dělení intervalu $[a,b]$

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$

$\Delta = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$

$\Delta' = (y_0, y_1, \dots, y_k)$ $\quad \forall x_i \ \exists y_j \ \ x_i = y_j$

je zjemnění dělení Δ

$|\Delta| = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}\}$

– norma dělení Δ.

na každém z intervalů $[x_{i-1}, x_i]$ $\quad i = 1, \dots, n$

$M_i(f, \Delta) = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$

$m_i(f, \Delta) = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$

definujeme

$$S(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f, \Delta) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

$$s(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f, \Delta) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

$S(f, \Delta)$ – horní součet

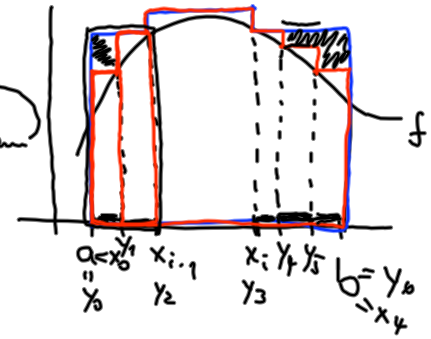
$s(f, \Delta)$ – dolní součet

Lemma 8.1. Je-li Δ' zjemněním dělení Δ potom $S(f,\Delta') \leq S(f,\Delta)$ a $s(f,\Delta') \geq s(f,\Delta)$.

Důkaz:

$\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_n)$

$\Delta' = (y_0, y_1, \dots, y_m)$ zjemnění



$\underline{[x_{i-1}, x_i] = [y_k, y_\ell]}$

$M_i(f,\Delta) \geq M_\ell(f,\Delta')$

$M_i(f,\Delta) \geq M_{k+1}(f,\Delta') = \sup_{x\in[y_k, y_{k+1}]} f(x)$

$\geq M_{k+2}(f,\Delta')$ $\quad [y_{k+1}, y_{k+2}]$

$\vdots$

$\geq M_\ell(f,\Delta')$

$$\boxed{M_i(f,\Delta)(x_i - x_{i-1}) \geq \sum_{j=1}^{\ell-k} M_{k+j}(f,\Delta')(y_{k+j} - y_{k+j-1})}$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} M_i(f,\Delta)(x_i - x_{i-1})}_{S(f,\Delta)} \geq \underbrace{\sum_{j=1}^{m} M_j(f,\Delta')(y_j - y_{j-1})}_{S(f,\Delta')}$$

Lemma 8.2

Mám Δ', Δ'' dvě dělení, potom

$$s(f,\Delta') \leq S(f,\Delta'')$$

Důkaz: Zvolím Δ dělení - společné zjemnění

$$s(f,\Delta') \leq s(f,\Delta) \leq S(f,\Delta) \leq S(f,\Delta'')$$

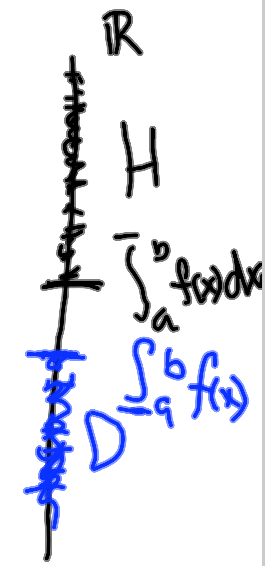
$$m_i(f,\Delta) \leq M_i(f,\Delta)$$

Označme $D[a,b]$ – množinu všech dělení intervalu $[a,b]$

$$H = \{ S(f,\Delta) \mid \Delta \in D[a,b] \}$$

$$H \geq D$$

$$D = \{ s(f,\Delta) \mid \Delta \in D[a,b] \}$$



$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf H$$

horní integrál f na inter. $[a,b]$

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup D$$

dolní integrál f na intervalu $[a,b]$

Řekneme, že f je na $[a,b]$ integrovatelná, pokud $\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$ – integrál f na $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)dx$$

Příklad $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = c$

$\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_n)$

$$\underline{S(f,\Delta)} = \sum_{i=1}^{n} M_i(f,\Delta)(x_i - x_{i-1})$$
$$= \sum_{i=1}^{n} c\,(x_i - x_{i-1}) = c \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) =$$
$$= c\,(\cancel{x_1} - x_0 + \cancel{x_2} - \cancel{x_1} + \cancel{x_3} - \cancel{x_2} + \dots + \cancel{x_{n-1}} - \cancel{x_{n-2}} + x_n - \cancel{x_{n-1}})$$
$$= c\,(x_n - x_0) = c\,(b-a)$$

$$s(f,\Delta) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{m_i(f,\Delta)}_{c}(x_i - x_{i-1})$$

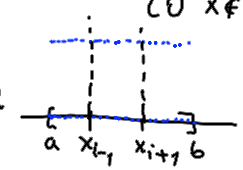
$H = \{c(b-a)\}$

$D = \{c(b-a)\}$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = c(b-a)$$

<u>Příklad</u> χ – Dirichletova funkci $\chi(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Δ – dělení $[a,b]$



$M_i(\chi,\Delta) = 1 \quad x \in [x_{i-1}, x_i] \cap \mathbb{Q}$, $\chi(x) = 1$

$m_i(\chi,\Delta) = 0 \quad x \in [x_{i-1}, x_i] \cap \mathbb{I}$, $\chi(x) = 0$

$$S(\chi,\Delta) = \sum_{i=1}^{n} M_i(\chi,\Delta)(x_i - x_{i-1}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = b - a$$

$$s(\chi,\Delta) = \sum_{i=1}^{n} m_i(\chi,\Delta)(x_i - x_{i-1}) =$$
$$= \sum 0 = 0$$

$H = \{b-a\}$ $\qquad \overline{\int_a^b} \chi(x)\,dx = b - a$

$D = \{0\}$ $\qquad \underline{\int_a^b} \chi(x)\,dx = 0$

Věta 8.3. Nechť f je omezená na $[a,b]$
Pak pro každé $\varepsilon>0$ existuje $\delta>0$ takové, že je-li Δ dělení $[a,b]$ takové, že $|\Delta|<\delta$ potom

$$S(f,\Delta) - \overline{\int_a^b} f(x)\,dx < \varepsilon$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx - s(f,\Delta) < \varepsilon$$

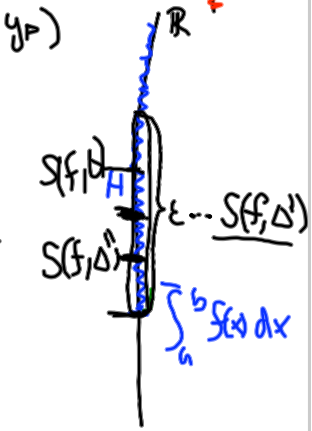
Důkaz: Δ' ...... $S(f,\Delta')-\overline{\int_a^b} f(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Delta'=(y_0,y_1,\dots,y_p)$

$|f(x)|<K$

$\Delta - |\Delta| < \frac{\varepsilon}{4Kp} = \delta$

$$|S(f,\Delta)-S(f,\Delta')| < \frac{\varepsilon}{2}$$



Δ'' - společné zjemnění Δ, Δ'

$$\underline{S(f,\Delta)-S(f,\Delta'')} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$\Delta''=(z_0,z_1,\dots,z_M)$

$[x_{i-1},x_i]=[z_s,z_r]$ $\quad s=r-1$

$z_i-z_{i-1}<\delta$
$x_i-x_{i-1}<\delta$

$M_i(f,\Delta)=M_r(f,\Delta'')$ $\quad s-r>1$

$$\left|\sum_{k=r+1}^{s} M_k(f,\Delta)(z_k-z_{k-1})\right| \le$$

$$\le K\left|\sum_{k=r+1}^{s}(z_k-z_{k-1})\right| \le K(x_i-x_{i-1}) < K\delta$$

$$|S(f,\Delta)-S(f,\Delta'')| < p\,2K\delta = \frac{\cancel{p}2\cancel{K}\varepsilon}{4\cancel{K}\cancel{p}} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Věta 8.4 Nechť f - omezená na $[a,b]$

1. Je-li f integrovatelná pak pro každou posloupnost dělení (Δ_n) intervalu $[a,b]$ takovou, že $\lim\limits_{n\to\infty}|\Delta_n|=0$ platí

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S(f,\Delta_n) = \lim_{n\to\infty} s(f,\Delta)$$

2. Existuje-li posloupnost (Δ_n) intervalu $[a,b]$ taková, že $\lim\limits_{n\to\infty}|\Delta_n|=0$ a

$$\lim_{n\to\infty} S(f,\Delta_n) = \lim s(f,\Delta)$$

potom f, je na $[a,b]$ integrovatelná $\int_a^b f(x)\,dx$

Důkaz: 1. $\int_a^b f(x)\,dx$ existuje pro zvolené $\varepsilon>0$

existuje $\delta>0$ takové, že $\underline{S(f,\Delta_n) - \int_a^b f(x)\,dx < \varepsilon}$

$\lim|\Delta_n|=0$ $\quad \underline{n_0}$ $\quad n>n_0$ $\quad |\Delta|<\delta$

$$\lim S(f,\Delta_n) = \int_a^b f(x)\,dx$$

2.

Důsledek 8.5 (Kritérium Integrovatelnosti)

f - omezená funkce na $[a,b]$

je integrovatelná na $[a,b]$ právě, když

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \Delta \quad S(f,\Delta) - s(f,\Delta) < \varepsilon$