UŽITÍ DERIVACÍ

Věta 7.22 (L'Hospitalovo pravidlo)

Buďte $f, g: J \to \mathbb{R}$ $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ x_0 - hromadný bod J

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$. Pokud existuje

$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (vlastní i nevlastní), potom existuje

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Důkaz: $x_0 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0+} \frac{f(x)}{g(x)}$, $x > x_0$ $[x_0, x] \subset J$

$\bar{f}: J \to \mathbb{R}$ $\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in J \setminus \{x_0\} \\ 0 & x = x_0 \end{cases}$

$\bar{g}: J \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$ $\bar{g}(x) = \begin{cases} g(x) & x \in J \setminus \{x_0\} \\ 0 & x = x_0 \end{cases}$

$[x_0, x]$ – spojitá ✓ (x_0, x) – musí mít derivaci ✓
– $g'(x) \neq 0$ ✓

$c \in (x_0, x)$

$$\frac{\bar{f}(x) - \bar{f}(x_0)}{\bar{g}(x) - \bar{g}(x_0)} = \frac{\bar{f}'(c)}{\bar{g}'(c)} = \frac{\bar{f}(x)}{\bar{g}(x)} \qquad x_0 < c < x$$

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{\bar{f}(x)}{\bar{g}(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to x_0^+} \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

obdobně $x \to x_0^-$

2. případ $x_0 = +\infty$ $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to 0+} h\left(\frac{1}{x}\right)$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{g\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)'}{\left(g\left(\frac{1}{x}\right)\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{f'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f'\left(\frac{1}{x}\right)}{g'\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Příklad

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} \underset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{n \cdot x^{n-1}}{e^x} \underset{L'H}{=} \text{——} \underset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{n!}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \underset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

Věta 7.23 (L'Hospitalovo pravidlo)

Buďte $f, g : J \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ x_0 - hromadný bod J

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$, pokud existuje

$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (vlastní nebo nevlastní), pak

existuje $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Příklad

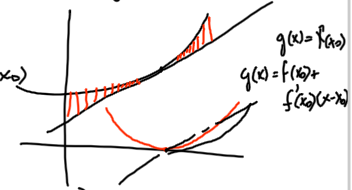
$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^4 + 2x^3 + 3}{x^3 + 3x^2 - 1} = \infty$$

7.7 Taylorův polynom, Taylorova řada

$g(x) = f(x_0)$

$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$



Věta 7.24 (Taylorova)

Buďte $x, a \in J$ dvě různá čísla (I interval s koncovými body a, x) $f: J \to \mathbb{R}$ $I \subset J$, f je $n+1$-krát diferencovatelná v I; $\varphi: I \to \mathbb{R}$ $\varphi'(t) \neq 0$ uvnitř I

Potom

$$f(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n + \underline{R_{n+1}(x)}$$

kde $\xi \in (a, x)$

$$R_n(x) = \frac{(x-\xi)^n}{n!}\,\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\varphi'(\xi)}\,f^{(n+1)}(\xi)$$

Důkaz: $F: I \to \mathbb{R}$ $F(x) = 0$ $F(a) = R_{n+1}(x)$

$$F(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{1}{2!}f''(t)(x-t)^2 - \ldots - \frac{1}{n!}f^{(n)}(t)(x-t)^n$$

$$F'(t) = 0 - \cancel{f'(t)} - (\cancel{f''(t)(x-t)} - \cancel{f'(t)}) - \frac{1}{2!}(\cancel{f'''(t)(x-t)^2} - \cancel{2f''(t)(x-t)})$$
$$- \frac{1}{3!}(\cancel{f^{(4)}(t)}(x-t)^3 - \cancel{3f'''(t)(x-t)^2}) - \ldots - \frac{1}{(n-1)!}(\cancel{f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}} -$$
$$-(n-1)f^{(n-1)}(t)(x-t)^{n-2}) - \frac{1}{n!}(f^{(n+1)}(t)(x-t)^n - \cancel{nf^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}})$$
$$= -\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n$$

aplikujeme Cauchyho větu o střední hodnotě na podíl $\frac{F}{\varphi}$ na $[a, x]$ $\exists \xi \in (a, x)$

$$\frac{F(x) - F(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = -\frac{1}{n!}\,\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n}{\varphi'(\xi)}$$

$$\frac{-R_{n+1}(x)}{\varphi(x)-\varphi(a)} = -\frac{1}{n!\,\varphi'(\xi)}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{n!\,\varphi'(\xi)}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n$$

Důsledek 7.25

1. pro $\varphi: I \to \mathbb{R}$ $(x-t)^{n+1}$ dostaneme

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi) \qquad \text{Lagrange}$$

2. p $\varphi: I \to \mathbb{R}$ $\varphi(t) = t$ dostaneme

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-\xi)^n(x-a)}{n!}f^{(n+1)}(\xi).$$

Příklad: Odhadnout hodnotu e. 0,001

$f(x) = e^x \quad a = 0 \quad x = 1 \qquad \underline{0 < \xi < 1}$

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

$$= \frac{1^{n+1}}{(n+1)!} e^{\xi} < \frac{1}{(n+1)!} e < \underbrace{\frac{4}{(n+1)!}}_{7!} < 0{,}001 \qquad n = 6$$

$$e \doteq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = \quad = 2{,}182 \ldots$$

Věta 7.26 (Taylorova řada)

Buďte $x \neq a$, $a < x$, f má v $[a, x]$ moi derivace všech řádů a $R_n(x)$ je definováno ve Větě 7.26

Potom

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underline{\frac{1}{n!} f^{(n)}(a)} (x-a)^n$$

právě když $\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$

Důkaz: označíme (s_n) – posloupnost částečných součtů

$$f(x) = s_n + R_{n+1}(x)$$

$$\lim_{n \to \infty} s_n + R_n(x) = f(x) \iff \lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} s_n = f(x)$$