Věta (o střední hodnotě)

$f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ spojitá má $f'(x)$ $\forall x \in (a,b)$

Potom $\exists c \in (a,b)$ $\quad f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$$f'(c)\cdot(b-a) = f(b) - f(a)$$

$f: J \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad x, y, z \in J$ $\quad x < y < z$

$$f(x)\cdot(z-y) + f(y)(x-z) + f(z)(y-x) \geq 0 \quad \text{konvexní}$$

$$\leq 0 \quad \text{konkávní}$$

Příklad: $\ln \quad [a,b] = [5,10]$ $\qquad \ln'(x) = \frac{1}{x}$

$\exists c \in (5,10) \quad \underbrace{5 < c < 10}$

$$\ln'(c) = \frac{1}{c} = \frac{\ln(10) - \ln(5)}{10-5} = \frac{\ln(2)}{5}$$

$$\frac{1}{5} > \frac{1}{c} > \frac{1}{10} \qquad \exp$$

$$\frac{1}{5} > \frac{\ln(2)}{5} > \frac{1}{10}$$

$$2 > 2\ln(2) > 1$$

$$\exp(2) > \exp(2\ln(2)) > \exp(1)$$

$$e^2 > e^{2\ln(2)} = \left(e^{\ln(2)}\right)^2 = \boxed{4 > e}$$

Věta 7.17

Buď $f: J \to \mathbb{R}$ spojitá. Potom:

1. Je-li $f'(x) > 0$ (případně $f'(x) = \infty$) pro $x \in J$, potom je f na J rostoucí.
2. Je-li $f'(x) < 0$ (případně $f'(x) = -\infty$) pro $x \in J$, potom je f na Jklesající.

Důkaz:

1. zvolím $x, y \in J$ $\underline{x > y}$ mám ukázat, že $\underline{f(x) > f(y)}$.

Aplikujeme větu o středni hodnotě na f na $[y, x]$

$\exists c \in (y, x)$

$$0 < \underbrace{(x-y)}_{>0} \underbrace{f'(c)}_{\geq 0} = f(x) - f(y)$$

$$f(y) \leq f(x)$$

Věta: Buď $f: J \to \mathbb{R}$ spojitá v $x_0 \in J$

1. pokud $\exists (x_0-\delta, x_0+\delta)$ takové, že $\forall x \in (x_0-\delta, x_0)$ je $f'(x) > 0$ a $\forall x \in (x_0, x_0+\delta)$ je $f'(x) < 0$, potom má f v x_0 lokální maximum.

2. Pokud $\exists (x_0-\delta, x_0+\delta)$ takové, že $\forall x \in (x_0-\delta, x_0)$ je $f'(x) < 0$ a $\forall x \in (x_0, x_0+\delta)$ je $f'(x) > 0$, potom má f v x_0 lokální minimum.

Důkaz:

1. $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ $x \neq x_0$ dokázat, že $f(x) < f(x_0)$

1. případ $x \in (x_0-\delta, x_0)$. Použijme větu o střední hodnotě na $[x, x_0]$ $\exists c \in (x, x_0)$ $x < c < x_0$

$$0 < \underbrace{(x_0 - x)}_{>0}\underbrace{f'(c)}_{>0} = f(x_0) - f(x) \qquad f(x) < f(x_0)$$

2. případ $x \in (x_0, x_0+\delta)$ na intervalu $[x_0, x]$

$$0 > \underbrace{(x - x_0)}_{>0}\underbrace{f'(c)}_{<0} = f(x) - f(x_0) \qquad \underline{f(x_0) > f(x)}$$

Příklad minimu $f(x) = x^2$ v bodě $x = 0$

minimum $f(x) = |x|$ v bodě $x = 0$

$$\left.\begin{array}{ll} f'(x) = -1 & x \in (-\infty, 0) \\ f'(x) = 1 & x \in (0, \infty) \end{array}\right\} \text{lokál. minimum}$$

Věta 7.19. Buď $f: J \to \mathbb{R}$.

1. Pokud $f''(x) < 0$ pro $x \in J$, potom je f na J konkáv

2. Pokud $f''(x) > 0$ pro $x \in J$, potom je f na J konvexní.

Důkaz: $x, y, z \in J$ $\quad x < y < z \quad [x,y]$ a $[y,z]$

$\exists c \in (x,y) \quad (y-x) f'(c) = f(y) - f(x) \quad /(z-y)$

$\exists d \in (y,z) \quad (z-y) f'(d) = f(z) - f(y) \quad /(y-x)$

$$\underbrace{(y-x)}_{>0}\underbrace{(z-y)}_{>0}\underbrace{(f'(d)-f'(c))}_{?} = f(z)(y-x) - f(y)(y-x) - f(y)(z-y) + f(x)(z-y)$$

$$= f(x)(z-y) + f(z)(y-x) + f(y)(x-y+y-z)$$

$$= f(x)(z-y) + f(y)(x-z) + f(z)(y-x)$$

> 0 konvexní

$d > c$

< 0 konkávní

$f'' > 0 \quad f'$ – rostoucí $\quad f'(d) > f'(c)$

$f'' < 0 \quad f'$ – klesající $\quad f'(d) < f'(c)$

Příklad $f(x)=x^2$ $f'(x)=2x$

$f''(x)=2$ $n=2$

$f''(0)=2 > 0$

$f''(x)>0$ $x \in$ Okolí

$f(x)=x^3$ $f'=3x^2$ ... $x_0=0$

$\underline{f''(x)=6x}$ $f''(0)=0$

x^4 $f'''=6$ $n=3$

x^5

$\vdots$

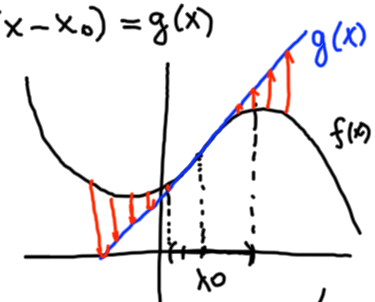
$f: J \to \mathbb{R}$ $x_0 \in J$ $f'(x_0)$ existuje a je vlastní

tečna $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=g(x)$

1. $\exists (x_0-\delta, x_0+\delta)$ taková, že

$f|_{(x_0-\delta,x_0)} > g|_{(x_0-\delta,x_0)}$

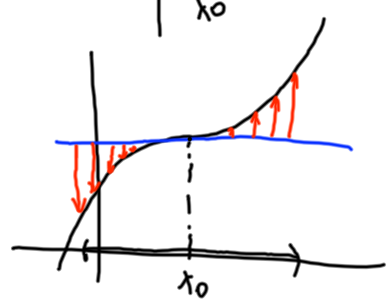
$f|_{(x_0,x_0+\delta)} < g|_{(x_0,x_0+\delta)}$



2. $\exists (x_0-\delta, x_0+\delta)$ taková, že

$f|_{(x_0-\delta,x_0)} < g|_{(x_0-\delta,x_0)}$

$f|_{(x_0,x_0+\delta)} > g|_{(x_0,x_0+\delta)}$



Příklad:

$f(x)=x^3$ $x_0=0$ $f'(x_0)=0$ $g(x)=0+0\cdot(x-0)=0$

2. $x^3<0$ $x<0$

$x^3>0$ $x>0$

Věta 7.20 Buď $f: J \to \mathbb{R}$ $x_0 \in J$ a existuje přirozené číslo n takové, že $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ a pro $0<k<n$ $f^{(k)}(x_0)=0$. Potom:

1. Je-li n liché $f^{(n)}(x_0)>0$ f je rostoucí v x_0.
2. Je-li n liché $f^{(n)}(x_0)<0$ pak f je klesající v x_0.
3. Je-li n sudé $f^{(n)}(x_0)>0$, pak f má v x_0 minimum.
4. Je-li n sudé $f^{(n)}(x_0)<0$, pak f má v x_0 maximum.

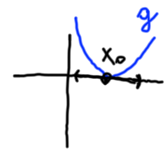
Důkaz: $f^{(n)}(x_0)>0$

Dokažujeme matematickou indukcí.

- $n=1$ $f'(x_0)>0 \xRightarrow[\text{Věta 7.11}]{}$ f je v x_0 rostoucí.
- Předpokládejme věta platí p n pokusíme se dokázat pro $k=n+1$

Případ 1 $k=n+1$ je liché to znamená, že n je sudé

$g=f'$ má lokální minimum



$f'(x_0)=0$

f' je kladná na $(x_0-\delta, x_0)$, $(x_0, x_0+\delta)$

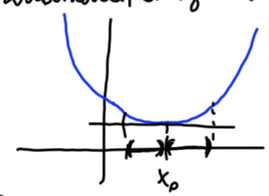
f $\nearrow$ $\nearrow$

Případ 2 $k=n+1$ je sudé to znamená, že n je liché

$g=f'$ n je liché tedy

g je rostoucí

Věta 7.18 f lokální minimum



Důsledek 7.21. Buď $f: J \to \mathbb{R}$ $x_0 \in J$ existuje $n>1$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ a $1<k<n$ $f^{(k)}(x_0)=0$.

1. Je-li n sudé $f^{(n)}(x_0)>0$ f je konvexní na okolí x_0.
2. Je-li n sudé $f^{(n)}(x_0)<0$ f je konkávní na okolí x_0.
3. Je-li n liché, potom má f v x_0 inflexi.

Důkaz: 1, 2. $g=f'$

3. $g(x)=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)$

$g'(x_0)=f'(x_0)-f'(x_0)\cdot 1=0$