$$\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$f : J \to I \quad x_0 \in J$$

$$f^{-1} : I \to J \quad f(x_0) \in I$$

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$$f = \tan$$

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

$$\arctan'(y) = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\arctan(y))}} = \cos^2(\arctan(y))$$

$$= \frac{\cos^2(\arctan(y))}{\cos^2(\arctan y) + \sin^2(\arctan y)} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\sin(\arctan y)}{\cos(\arctan y)}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{1 + (\tan(\arctan y))^2} = \frac{1}{1 + y^2}$$

$$\cos^2(\arctan y) \neq 0$$

$$\arctan y = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

Title: 3. 13-2:49 odp. (1 of 9)

DIFERENCIÁL FUNKCE

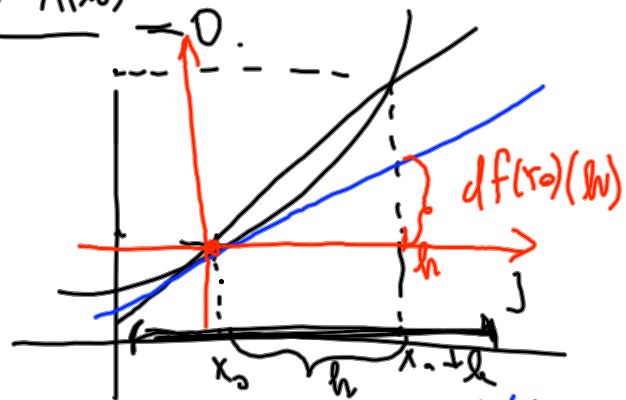
$f: J \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in J$

Lineární homogenní zobrazení $A: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je diferenciálem f v bodě x_0 jestliže

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - A(h)}{h} = 0.$$

$\underbrace{df(x_0)}(h)$

$A(h) = \underset{\sim}{k} \cdot h$



$A(\alpha h) = \alpha A(h)$

Věta 7.10.

Buď $f: J \to \mathbb{R}, x_0 \in J$. Funkce f má v bodě x_0 diferenciál, právě když existuje $f'(x_0)$ a platí $df(x_0)(h) = f'(x_0) \cdot h$.

$df(x_0)$ – zobrazení $\qquad df(x_0) = f'(x_0)\, dx$

$dx: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad \underline{h \mapsto h}$ $\qquad \left[\frac{df(x_0)}{dx}\right] = f'(x_0)$

DERIVACE VYŠŠÍCH ŘÁDŮ

$f: J \to \mathbb{R}$ $x_0 \in J$ $f'(x_0)$

$f'(x)$ existuje a je konečná na nějakém okolí U bodu x_0

$f': U \to \mathbb{R}$ derivaci $(f')'(x_0)$ ozn. $f''(x_0)$

druhá derivace f v bodě x_0.

$n \in \mathbb{N}$ derivaci $(f^{(n-1)})'(x_0)$ ozn. $f^{(n)}(x_0)$

n-tá derivace f v bodě x_0

Př. $f(x) = x$ $f' = 1$

$f(x) = x^n$ $f' = nx^{n-1}$, $f'' = n \cdot (n-1)\, x^{n-2}$

$f^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$

$f(x) = e^x$

EXTRÉMY

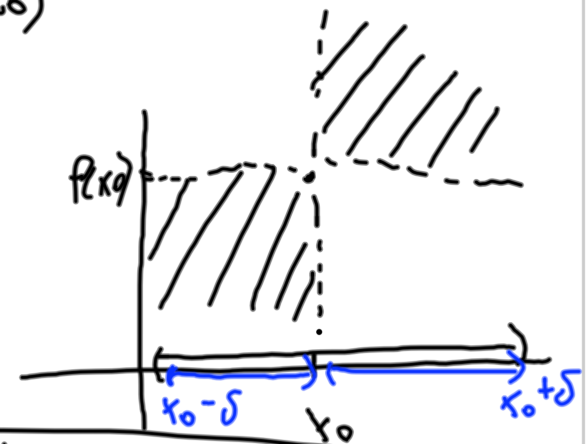
$f: X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x_0 \in X$

pokud existuje $\delta > 0$ takové, že

$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap X$ platí $f(x) < f(x_0)$

$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap X$ platí $f(x_0) < f(x)$

f je rostoucí v bodě $f(x_0)$



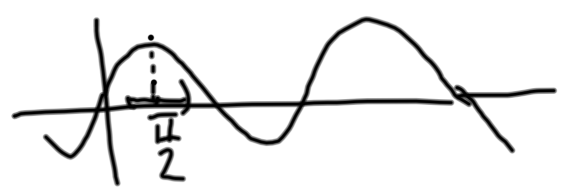
---

pokud existuje $\delta > 0$ okolí $U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$f|_{U \cap X}$ má maximum v x_0

f má v bodě x_0 lokální maximum

Př: $\sin x$



Věta 7.11 Buď $f: J \to \mathbb{R}$, $x_0 \in J$

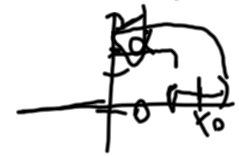
1. Jestliže $f'(x_0) > 0$ (případně $f'(x_0) = \infty$), potom je f v x_0 rostoucí.
2. Jestliže $f'(x_0) < 0$ ($f'(x_0) = -\infty$), potom je f v x_0 klesající.

Důkaz: 1. $f'(x_0)$ existuje $\quad \lim_{x \to x_0} \boxed{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$

$\downarrow \alpha > 0, \; = \infty$

Existuje okolí U bodu x_0

$x \in U \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$



$x > x_0 \ldots x - x_0 > 0$

$$f(x) - f(x_0) > (x - x_0)\alpha > 0$$

$$f(x) > f(x_0)$$

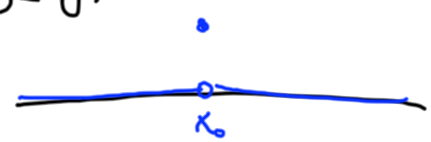
$x < x_0 \ldots\ldots x - x_0 < 0$

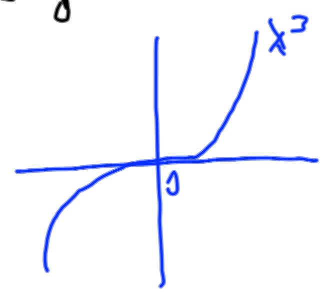
$$f(x) - f(x_0) < (x - x_0)\alpha$$

$$f(x) < f(x_0) \qquad f \text{ je rostoucí}$$

Důsledek 7.12. Je-li bod x_0 bodem lokálního extrému f a pokud $f'(x_0)$ existuje. Potom $f'(x_0) = 0$.

Př.:

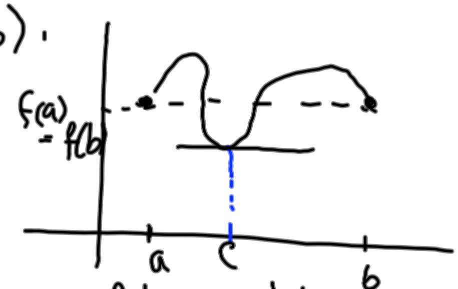




Věta 7.13 (Rolleova věta)

Buď $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. $f(a) = f(b)$, f je spojitá a $f'(x)$ existuje $\forall x \in (a,b)$.

Potom existuje $c \in (a,b)$ takový, že $f'(c) = 0$.



Důkaz: pokud f je konstantní c libovolný bod

f spoj. na $[a,b]$ nabývá max. min.

$\underline{\max = f(c)} > \underline{f(a)}$. $c \in (a,b)$

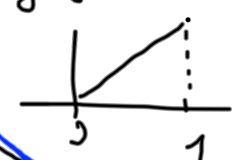
$f'(c) > 0$ — rostoucí spor c - max. f.

$f'(c) < 0$ — klesající spor c - max f

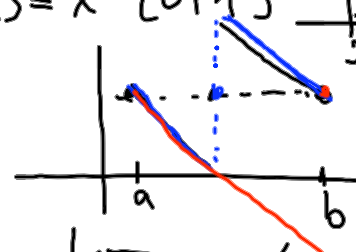
$f'(c) = 0$

Všechny předpoklady Rolleovy věty jsou podstatné

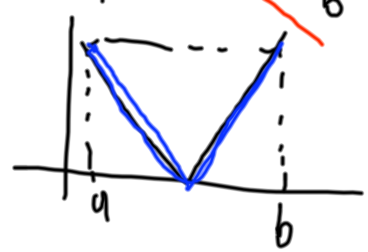
$f(a) \neq f(b)$ $f(x) = x$ $[0,1]$



f je spojitá



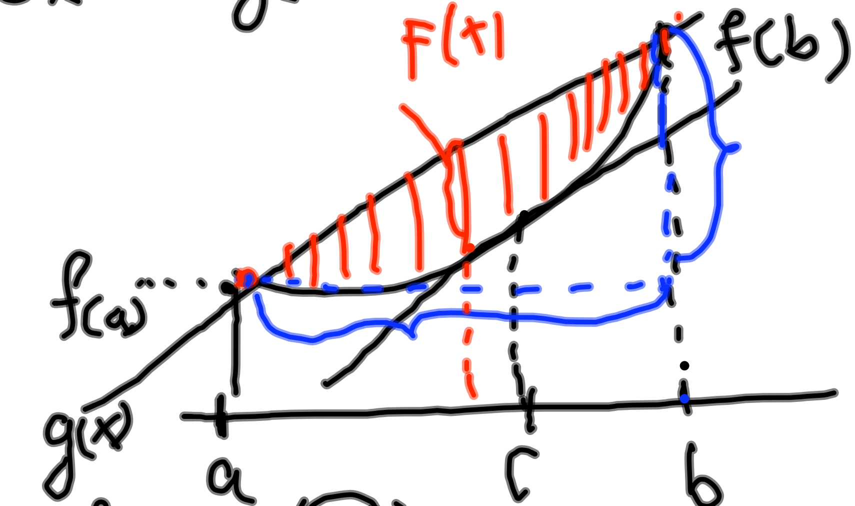
f' existuje (a,b)



Věta 7.14 (Lagrangeova věta o střední hodnotě)

Buď $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, spojitá, má derivaci v (a,b). Potom existuje bod $c \in (a,b)$ takový, že

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



Důkaz:

$$g(x) = \frac{f(b)-f(a)}{(b-a)}(a-x) + f(a)$$

$$F(x) = f(x) - g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-x) - f(a)$$

$$0 = F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Věta 7.16 (Cauchyho věta o střední hodnotě)

Buď $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, spojitá, f' existuje na (a,b),

$g : [a,b] \to \mathbb{R}$, g' existuje na $[a,b]$ a je konečná, $g' \neq 0$

Potom existuje $c \in (a,b)$ takové, že

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Důkaz: $F(a)=0$ $F(b)=0$

$$F(x) = \big(f(x)-f(a)\big)\big(g(b)-g(a)\big) - \big(g(x)-g(a)\big)\big(f(b)-f(a)\big)$$

$$F'(x) = f'(x)\big(g(b)-g(a)\big) - g'(x)\big(f(b)-f(a)\big)$$

$$f'(c)\underbrace{\big(g(b)-g(a)\big)} = \underbrace{g'(c)}\big(f(b)-f(a)\big)$$

Důsledek 7.15. Buďte $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$, $f'(x) = g'(x)$ $\forall x (a,b)$. Potom $f-g$ - konstantní

Důkaz: $h(x) = f(x) - g(x)$ $\quad h'(x) = f'(x) - g'(x)$

$x < y \quad x < c < y$

$$h'(c) = \frac{h(y) - h(x)}{y - x} = 0$$

$$h(y) = h(x)$$