MOCNINNÉ ŘADY

$x_0 \in \mathbb{R}$ (a_n) · posloupnost v $\mathbb{R}$

$\sum f_n$ – mocninná řada

$f_1 = a_1$

$f_n(x) = a_n (x - x_0)^{n-1}$ $n = 2, 3, 4, \ldots$

$\sum a_n (x - x_0)^{n-1}$

$f_1(x) = a_1$ $\mathbb{R}$

$f_2(x) = a_2 (x - x_0) = a_2 x - a_2 x_0$

$f_3(x) = a_3 (x - x_0)^2 = a_3 x^2 - 2 a_3 x x_0 + a_3 x_0^2$

Věta 6.11 Oborem konvergence $\sum a_n(x-x_0)^{n-1}$ je interval konečné délky se středem v x_0 nebo množina $\mathbb{R}$.
V prvním případě je-li

$$p = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

potom poloměr tohoto intervalu je $1/p$.

Důkaz: $\sum a_n(x-x_0)^{n-1}$

$x = x_0$ potom $\sum a_n(x-x_0)^{n-1}$ konverguje

$x \neq x_0$ uvažuji $\sum |a_n|\cdot|(x-x_0)|^{n-1}$

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n||x-x_0|^{n-1}} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}\cdot \underline{\limsup \sqrt[n]{|x-x_0|^{n-1}}}$$

$$= \limsup \sqrt[n]{|a_n|}\ \limsup \frac{|x-x_0|}{\sqrt[n]{|x-x_0|}}$$

$$= \underbrace{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}_{p}\,|x-x_0| \begin{cases} < 1 & \text{– konverguje} \\ > 1 & \text{– nesplň. podm. konv.} \end{cases}$$

$p\cdot|x-x_0| < 1$ $\quad p = 0 \ldots\ldots \boxed{x \in \mathbb{R}}$

$p = \infty \ldots\ldots$ nekonverguje

$\longrightarrow$ $\underline{|x-x_0| < \frac{1}{p}}$ $\quad p \in \mathbb{R}^+ \ldots\ldots \underline{x \in (x_0 - \frac{1}{p}, x_0 + \frac{1}{p})}$

$p|x-x_0| > 1$ $\quad \underline{x \in (-\infty, x_0 - \frac{1}{p}) \cup (x_0 + \frac{1}{p}, \infty)}$

$\sum |a_n|$ – nesplňuje nutnou podm. konverg.
$\sum a_n$

Title: 2. 20-2:56 odp. (2 of 7)

Příklad: $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x+1)^{n-1}$ $\quad x_0 = -1$

$$(a_n) = \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$$

$$\sum a_n \cdot (x-x_0)^{n-1}$$

$$\sum \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x+1)^{n-1} \right|$$

$$p = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\underbrace{\sqrt[n]{n}}} = 1$$

$x \in (-2, 0)$

$$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}(-2+1)^{n-1} = \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}(-1)^{n-1} = \sum \frac{(-1)^{2n}}{n} = \sum \frac{1}{n}$$

$x = -2$ …. nekonverguje

$x = 0$ … konverguje

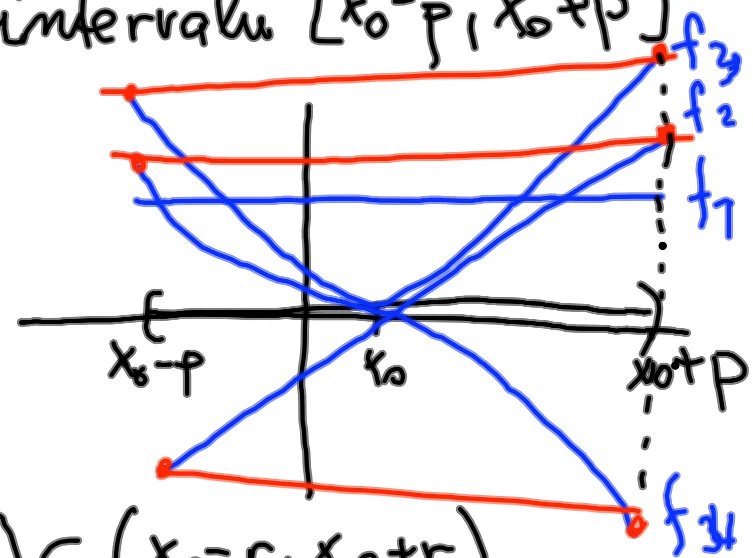
$$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}(0+1)^{n-1} = \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$\lim b_n = 0$

$|b_{n+1}| < |b_n|$

Obor konvergence je $(-2, 0]$

Věta 6.12 Mocninná řada $\sum a_n (x-x_0)^{n-1}$, r - poloměr konvergence, potom stejnoměrně konverguje na každém intervalu $[x_0-p, x_0+p]$ kde $0 \le p < r$.



Důkaz

→ $\sum a_n(x-x_0)^{n-1}$ konverguje stejnoměrně na intervalu $\underline{[x_0-p, x_0+p]} \subset (x_0-r, x_0+r)$

→ $\underline{|a_n|}|(x-x_0)^{n-1}| \le \underline{|a_n|}\cdot|(x_0+p-x_0)^{n-1}| = \underline{|a_n| p^{n-1}}$

$\forall x \in [x_0-p, x_0+p]$ $\quad x \le x_0+p$ $\quad |pow_n(x-x_0)|$ rostoucí na $[x_0, x_0+p]$

$\sum |a_n| p^{n-1}$ $\quad p<r$

Důsledek 6.13. Součet mocninné řady $\sum a_n (x-x_0)^{n-1}$ spojitá funkce ve vnitřních bodech intervalu konvergence

6.4 Exponenciální funkce a logaritmus

$\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$

$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $\qquad e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

Věta 6.14 (Vlastnosti exponenciální funkce)

1. exp je spojitá
2. exp je rostoucí
3. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ platí $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$
4. $\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} \exp(x) = \infty$

Důkaz 3. $\exp(x) \cdot \exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$

$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \_\_\_$

$\exp(y) = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \_\_ + \frac{y^n}{n!} + \_\_\_$

$$\begin{array}{cccccc} & 1 \cdot 1 & 1 \cdot x & 1 \cdot \frac{x^2}{2!} & 1 \frac{x^3}{3!} & — \\ 1 & y \cdot 1 & y x & y \frac{x^2}{2!} & y \frac{x^3}{3!} & — \\ & \frac{y^2}{2!} \cdot 1 & \frac{y^2}{2!} x & \frac{y^2}{2!} \frac{x^2}{2!} & \frac{y^2}{2!} \frac{x^3}{3!} & — \\ & \frac{y^3}{3!} \cdot 1 & \frac{y^3}{3!} x & \frac{y^3}{3!} \frac{x^2}{2!} & \frac{y^3}{3!} \frac{x^3}{3!} & — \end{array}$$

$1 + (x+y) + \left(\frac{x^2}{2} + xy + \frac{y^2}{2}\right) + \left(\frac{x^3}{3!} + \frac{yx^2}{2!} + \frac{y^2 x}{2!} + \frac{y^3}{3!}\right)$

$\frac{(x+y)^0}{0!} \quad \frac{(x+y)}{1!} \quad \frac{(x+y)^2}{2!} \quad \frac{(x+y)^3}{3!}$

n-tý člen Cauchyho součinu

$a_n = \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1} y}{(n-1)!\,1!} + \frac{x^{n-2} y^2}{(n-2)!\,2!} + \_\_\_ + \frac{x y^{n-1}}{1!\,(n-1)!} + \frac{y^n}{n!}$

$= \frac{1}{n!}\left(x^n + \underbrace{\frac{n!}{(n-1)!\,1!}} x^{n-1} y + \underbrace{\frac{n!}{(n-2)!\,2!}} x^{n-2} y^2 + \_\_ + \underbrace{\frac{n!}{1!\,(n-1)!}} x y^{n-1} + \ldots\right.$

$= \frac{1}{n!}\left(\binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \_\_\_ + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n\right)$

$= \frac{1}{n!}(x+y)^n$

$\exp(x) \cdot \exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x+y)^n = \exp(x+y)$

2. $x < y$ $\quad \exp(x) < \exp(y)$

$\boxed{0 \leq x < y} \Rightarrow \frac{x^n}{n!} < \frac{y^n}{n!} \quad \ldots \quad \sum \frac{x^n}{n!} \leq \sum \frac{y^n}{n!}$

$1 = \exp(0) = \exp(x - x) = \exp(x) \cdot \exp(-x)$

$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

$x \leq 0 < y$

$1 < \quad 1 \quad > 1$

$x < y < 0 \leq -y < -x$

$\exp(x) \quad \exp(y) \quad \exp(-y) < \exp(-x)$

$\frac{1}{\exp(-x)} < \frac{1}{\exp(-y)}$

4. $\exp(1) = e > 1$

$\exp(1+1) = e \cdot e$

$\vdots$

$\exp(n) = e^n$

$\lim_{n \to \infty} \exp(n) = \infty$

$\exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)}$ $\qquad \lim_{n \to -\infty} = 0$

Důsledky

- exp – homeomorfismus $\mathbb{R}$ a $(0,\infty)$
- má spojitou inverzi $\ln : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$
- $\exp(k) = e^k \quad \forall k \in \mathbb{N}$