NEKONEČNÉ ŘADY FUNKCÍ

6.1 Násobení řad

$x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$

$y = y_1 + y_2 + \dots + y_n$

$x \cdot y$

$n=1 \quad \underline{x_1 \cdot y_1}$

$n=2 \quad x_1 y_1 + \underline{x_1 y_2 + x_2 y_2 + x_2 y_1} = s_2 t_2$

$n=3 \quad x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_2 + x_2y_1 + \underline{x_1y_3 + x_2y_3 + x_3y_3 + x_3y_2 + x_3y_1} = s_3t_3$

$\vdots$

$n \quad \dots\dots + \underbrace{x_1y_n + x_2y_n + \dots + x_{n-1}y_n + x_ny_n + x_ny_{n-1} + \dots + x_ny_2 + x_ny_1}$

$\sum x_n \;..\; (x_n) \quad x_1, x_2, x_3, \dots \quad (s_n) \quad s_1 = x_1,\; s_2 = x_1 + x_2,\; s_3 = x_1 + x_2 + x_3,\; \dots$

$\sum y_n \;..\; (y_n) \quad y_1, y_2, \dots \quad (t_n) \quad t_1 = y_1,\; t_2 = y_1 + y_2,\; t_3 = y_1 + y_2 + y_3,\; \dots$

$\sum z_n$

$$z_n = x_1y_n + x_2y_n + \dots + x_ny_n + x_ny_{n-1} + \dots + x_ny_1 \qquad (6.1.1)$$

Posloupnost částečných součtů řady $\sum z_n$ je

$(u_n) \quad u_1 = x_1y_1,\; u_2 = x_1y_1 + (x_1y_2 + x_2y_2 + x_2y_1)$

$u_3 = \dots\dots$

$u_1 = s_1t_1,\; u_2 = s_2t_2, \dots, u_n = s_nt_n$

Věta 6.1 Buďte $\sum x_n, \sum y_n$ řady, nechť $\sum z_n$ je řada, jejíž členy jsou určeny (6.1.1). Konvergují-li $\sum x_n, \sum y_n$ potom konverguje i $\sum z_n$ a platí $\sum z_n = \sum x_n \cdot \sum y_n$.

Důkaz (u_n) – posl. část. součtů $\sum z_n$

s_n – posl. část. souč. $\sum x_n$

t_n · $\sum y_n$

$\lim u_n =$ $\qquad u_n = s_n t_n$

$= \lim s_n t_n = \lim s_n \cdot \lim t_n$

$$
\begin{array}{cccc|c}
x_1 y_1 & x_2 y_1 & x_3 y_1 & x_4 y_1 & \text{—} \\
x_1 y_2 & x_2 y_2 & x_3 y_2 & x_4 y_2 & \text{—} \\
x_1 y_3 & x_2 y_3 & x_3 y_3 & x_4 y_3 & \text{—} \\
x_1 y_4 & x_2 y_4 & x_3 y_4 & x_4 y_4 & \text{-} \\
\hline
| & | & | & | & \diagdown
\end{array}
$$

$$(x_1 y_1) + (\underline{x_1 y_2 + x_2 y_2 + x_2 y_1}) + (\underline{x_1 y_3 + x_2 y_3 + x_3 y_3 + x_3 y_2 + x_3 y_1}) +$$

$+ ($

Věta 6.2 $\sum \bar{z}_n$ která je tvořena součiny $x_i y_j$ uspořádanými v libovolném pořadí. Jestliže řady $\sum x_n, \sum y_n$ konvergují absolutně, potom řada $\sum \bar{z}_n$ konverguje absolutně a platí

$$\sum \bar{z}_n = \sum x_n \cdot \sum y_n .$$

Cauchy-ho součin řad $\sum x_n, \sum y_n$

$$\begin{array}{cccc}
 & x_1y_1 & x_2y_1 & x_3y_1 \\
z_1 & x_1y_2 & x_2y_2 & x_3y_2 \\
z_2 & x_1y_3 & x_2y_3 & x_3y_3 \\
z_3 & x_1y_4 & x_2y_4 & x_3y_4
\end{array}$$

$\sum z_n$ $\qquad \underbrace{z_n = x_1y_n + x_2y_{n-1} + \_\_ + x_{n-1}y_2 + x_ny_1}$

Cauchyho součin řad $\sum x_n \sum y_n$.

$\sum x_n, \sum y_n \qquad x_n = q^{n-1}, \; y = q^{n-1}$

$$\begin{array}{cccc}
 & 1\cdot 1 & q\cdot 1 & q^2\cdot 1 \\
1 & 1\cdot q & q\cdot q & q^2\cdot q \\
2q & 1\cdot q^2 & q\cdot q^2 & q^2\cdot q^2 \\
3q^2 & & &
\end{array}$$

$z_n = n\cdot q^{n-1}$

$$\boxed{\sum n q^{n-1}}$$

6.2 Nekonečné řady funkcí

$X \subset \mathbb{R}$ (f_n) - posloupnost funkcí

$f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $\sum f_n$ - nekonečná řada funkcí

(h_n) $h_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$

$h_n = f_1 + f_2 + \dots + f_n$

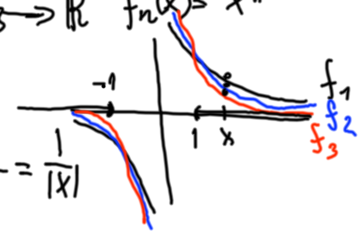
(h_n) - posloupnost částečných součtů řady $\sum f_n$

Jestliže posloupnost (h_n) bodově konverguje na nějaké množině $Y \subset \mathbb{R}$, říkáme, že $\sum f_n$ bodově konverguje.

Maximální množině $Z \subset \mathbb{R}$ na které $\sum f_n$ konverguje říkáme obor konvergence.

Jestliže posloupnost (h_n) stejnoměrně konverguje na Y k funkci f říkáme, že $\sum f_n$ stejnoměrně konverguje

Př: $\sum f_n$, $f_n : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ $f_n(x) = \frac{n}{x^n}$



$\sum \frac{n}{|x|^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\,|x|^n}{|x|^{n+1}\, n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n\,|x|} = \frac{1}{|x|}$$

$1/|x| < 1$ – konverguje

> 1 – nesplní nut. podm. konvergence

$x = -1$

$\sum \frac{n}{(-1)^n} = \sum n (-1)^n$

$\sum \frac{n}{1} = \sum n$

Oborem konvergence $\sum \frac{n}{x^n}$ je množina $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

Věta 6.4 (Cauchy-Bolzanovo kritérium)

Řada $\sum f_n$ konverguje na množině $Y \subset \mathbb{R}$ stejnoměrně právě, když $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ $n_1 \leq n_2$ $n_1, n_2 > n_0$ $\forall y \in Y$ platí že $|f_{n_1}(y) + f_{n_1+1}(y) + \dots + f_{n_2}(y)| < \varepsilon$

Důkaz: Zopakuji $\sum a_n \to \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : \forall n_1, n_2 > n_0 : \underbrace{|a_{n_1} + a_{n_1+1} + \dots + a_{n_2}|}_{s_{n_2} - s_{n_1 - 1}} < \varepsilon$

aplikuji na posloupnost částečných součtů (s_n)

Důsledek 6.5 (Nutná podm. stejnoměr. konvergence)

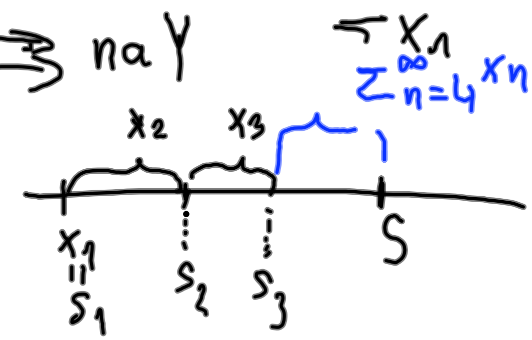
$n_1 = n_2$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : \forall n > n_0\ \forall y \in Y\ |f_n(y) - 0| < \varepsilon$

Jestliže $\sum f_n \rightrightarrows$ na Y potom $f_n \rightrightarrows 0$ na Y

Důsledek 6.6. $\sum f_n \rightrightarrows$ na Y

$$\left(\sum_{n=k}^{\infty} f_n\right)_{k \in \mathbb{N}} \rightrightarrows 0$$



Věta 6.8. Mějme (f_n), (g_n) – posloupnosti funkcí $|f_n| < g_n \ \forall n \in \mathbb{N}$. Jestliže řada $\sum g_n \rightrightarrows$ na Y potom řada $\underline{\sum f_n}$ konverguje stejnoměrně absolutně

Důkaz $\sum |f_n|$ $\quad |f_n| < g_n \quad \sum g_n \rightrightarrows$

$\varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \forall n_1, n_2 > n_0 \quad |g_{n_1} + g_{n_1+1} + \ldots + g_{n_2}| < \varepsilon$

$$\left| |f_{n_1}| + |f_{n_1+1}| + \ldots + |f_{n_2}| \right| \leq |g_{n_1} + g_{n_1+1} + \ldots + g_{n_2}| < \varepsilon$$

Věta 6.9. Nechť f_n je spojitá $\forall n \in \mathbb{N}$ a řada $\sum f_n$ stejnoměrně konverguje k f. Potom je f spojitá.

Důkaz: Vezmějme posloupnost částečných součtů (h_n) řady $\sum f_n$.

$h_1 = f_1$

$h_2 = f_1 + f_2$

h_n – spojité

h_n – spojité

$h_n \rightrightarrows f$

Podle Věty 5.9. f - spojitá

Důsledek 6.10 $\quad f_n$ – spoj. $\sum f_n \rightrightarrows f$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \sum a_n \quad \text{kde } a_n = \lim_{x \to x_0} f_n(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} \sum f_n(x) = \sum \lim_{x \to x_0} f_n(x)$$

Title: 2. 13-4:54 odp. (7 of 7)