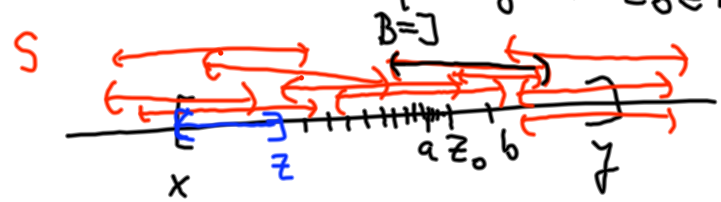
Lemma 4.6 (Heine-Borel) Množina $[x,y]$ je kompaktní.

Důkaz: Mějme S otevřené pokrytí $[x,y]$.
Označím A těch $z \in [x,y]$, že interval $[x,z]$ má konečné podpokrytí
Předně $x \in A$ (nebo-li $[x,x]$ má kon. podpokrytí)

$A \leq y \quad z_0 = \sup A$

1. $z_0 \in A$, $z_0 = y$

1. $z_0 \in A \quad z_0 \in [x,y]$ existuje prvek $B \in S$ $z_0 \in] \subset B$
protože z_0 je supremum A existuje $a \in A$ $a \in]$
čili $[x,a]$ se dá pokrýt konečně mnoha prvky S
to znamená, že i interval $[x,z_0]$ se dá pokrýt konečně mnoha prvky S. $z_0 \in A$



2. $z_0 = y$ předpokládejme, že $\underline{z_0 < y}$
$[x,z_0]$ lze pokrýt konečně mnoha prvky S
$B \in S \quad z_0 \in] \subset B \quad \exists b \in] \quad z_0 < b < y$

tzn. $[x,b]$ se dá také pokrýt konečně mnoha prvky z S. $b \in A$ spor z_0 je $\sup A$

Věta 4.7. Buď $A \subset \mathbb{R}$, pak následující podmínky jsou ekvivalentní:

1) A je uzavřená a ohraničená

2) A je kompaktní

Důkaz: 1. předpokládejme, že A je uzavřená a ohraničená. $x, y \in \mathbb{R}$ $x \leq A \leq y$

$A \subset [x, y]$. Podle Lemmatu 4.6 je $[x, y]$ kompaktní a A je jeho uzavřená podmnožina

Podle Věty 3.3 A je kompaktní

2. Předpokládejme, že A je kompaktní

Podle Věty 3.2 je uzavřená

Předpokládejme, že ohraničená není

$S = \{(-n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ $\cup S = \mathbb{R} \supset A$

$S' = \{(-n_1, n_1), (-n_2, n_2), \ldots, (-n_k, n_k)\}$ je podpokr. A

$\cup S' = (-\max\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}, \max\{n_1, n_2, \ldots, n_k\})$

Věta 4.8 Každá neprázdná kompaktní množina v $\mathbb{R}$ má maximum a minimum.

Důsledek 4.9 (Weierstrassova) Každá spojitá funkce definovaná na kompaktním intervalu nabývá maxima a minima.

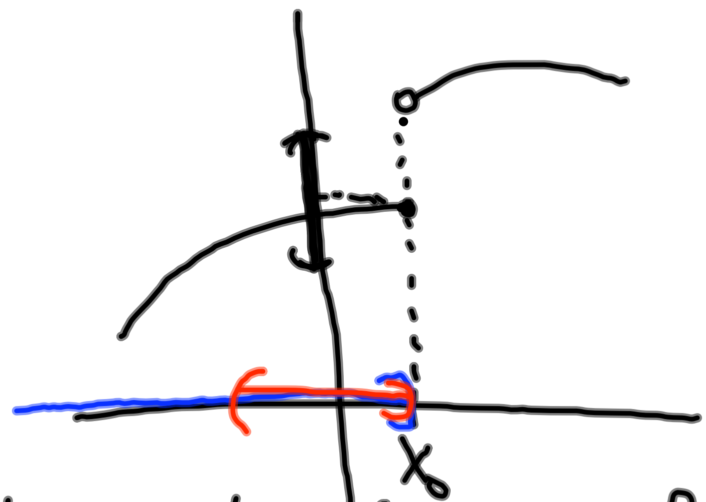
Důkaz Důsl. 4.4 obraz intervalu interval,
Podle Věty 3.6 je tento interval kompaktní
a podle předchozího tvrzení má své maximum
i minimum

4.2. Vlastnosti spojitých funkcí

$f: X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in X$

f je spojitá zleva v x_0 je-li spoj $f|_{(-\infty, x_0]}$ v x_0

f zprava spoj $f|_{[x_0, \infty)}$ v x_0



Věta 4.10 funkce $f: X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ je spojitá v $x_0 \in X$ právě tehdy je-li v x_0 spoj zleva i zprava

Věta 4.11 Funkce $f: X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá v $x_0 \in X$ právě když $\forall$ otevřenému intervalu $J \ni f(x_0)$ existuje otevřený interval $I \ni x_0$ takový, že

$$f(I \cap X) \subset J.$$

Důkaz: f je spojitá v x_0: $\forall V \in Nb_{f(x_0)} \exists U \in Nb_{x_0}: f(U) \subset V$

$J \ni f(x_0)$ $J \in Nb_{f(x_0)}$ ..... $U \in Nb_{x_0}$ $f(U) \subset V$

$V \in Nb_{x_0} \Rightarrow I \ni x_0$ $I \subset U$ $\qquad f(\underline{U}) \subset V$

tím spíš $f(\overline{I \cap X}) \subset V = J$

Naopak $\forall J \ni f(x_0) \exists I \ni x_0$ tak, že $f(I \cap X) \subset J$

zvolím $V \in Nb_{f(x_0)}$ tam $\exists J$ - interval $f(x_0) \in J \subset V$

k tomuto intervalu J podle předpokladu

$\exists$ interval $I \ni x_0$ $f(\underbrace{I \cap X}) \subset J \subset V$

U - okolí x_0 v indukt. topolog. X

Důsledek 4.12 (ε-δ kriterium spojitosti)

funkce $f: X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá v x_0 právě když $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ takové, že $\forall x \in X$ $|x - x_0| < \delta$ platí $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

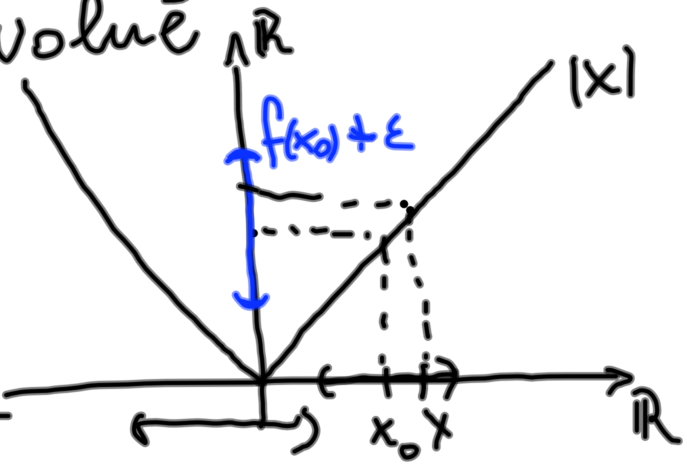
Př.: $f(x) = |x|$ je spojitá

$x_0 \in \mathbb{R}$ volím $\varepsilon > 0$ - libovolné

položíme $\delta = \varepsilon$

máme ověřit $\forall x \; |x - x_0| < \delta$

platí $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

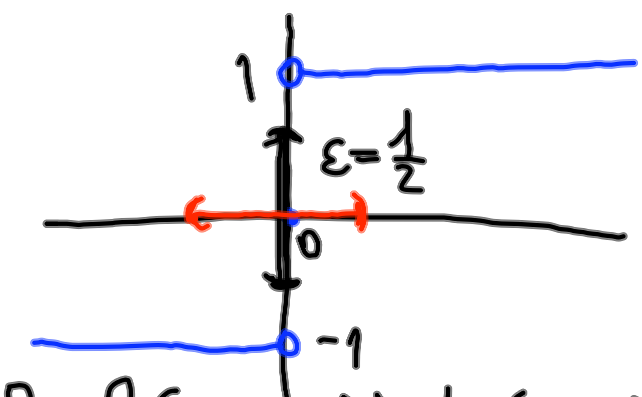


$x \in \mathbb{R}$ .. $|x - x_0| < \delta = \varepsilon$

$$|f(x) - f(x_0)| = \big||x| - |x_0|\big| \leq |x - x_0| < \delta = \varepsilon$$

$< \varepsilon$

Př.: $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$



nespojitá v 0.

Položím $\varepsilon = \frac{1}{2}$ dokážu $\forall \delta > 0$ $f((-\delta, \delta)) \not\subset (-\varepsilon, \varepsilon)$

$(-\delta, \delta) \ni x \neq x_0$ $f(x) \in \{1, -1\} \not\subset (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Věta 4.13 Funkce $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = 1/x$ je spojitá

Důkaz: $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$; volím $\varepsilon > 0$ libovolně

položím $\delta = \min\left\{\frac{|x_0|}{2}, \frac{\varepsilon x_0^2}{2}\right\} > 0$

musím ukázat, že $\forall x$ $|x - x_0| < \delta$

$|x - x_0| < \frac{|x_0|}{2}$, $|x - x_0| < \frac{\varepsilon x_0^2}{2}$

$|x_0| - |x| < \big||x| - |x_0|\big| \leq |x - x_0| < \delta$

$|x_0| - \delta < |x|$

$|f(x) - f(x_0)| =$

$$= \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \frac{|x_0 - x|}{|x x_0|} < \frac{\delta}{|x||x_0|} < \frac{\delta}{(|x_0| - \delta)|x_0|}$$

$$\leq \frac{\delta}{\underbrace{\left(|x_0| - \frac{|x_0|}{2}\right)}_{\frac{|x_0|}{2}}|x_0|} = \frac{2\delta\,\varepsilon}{\varepsilon x_0^2} < \frac{\delta}{\delta}\varepsilon = \varepsilon$$