$f: X \longrightarrow Y$ je spojité v $x \in X$

$\forall V \in Nb_{f(x)}\ \exists U \in Nb_x$ takové, že $f(U) \subset V$.

Věta 3.4 Zobrazení $f: X \longrightarrow Y$ je spojité právě když vzor libovolné otevřené množiny je otevřená množina.

Důkaz: předp. $f: X \to Y$ spojité. Buď $V \in Op(Y)$ proč. $f^{-1}(V)$ - otevřená $x \in f^{-1}(V)$, neboli $f(x) \in V$ $V \in Nb_{f(x)}$ protože f je spojité $\exists U \in Nb_x$ $f(U) \subset V$

Platí $f(U) \subset V \overset{?}{\Longrightarrow} U \subset f^{-1}(V)$

Předpokládejme vzor otevřené je otevřená

$x \in X$, volím $V \in Nb_{f(x)}$ libovolně $f(x) \in V$

$f^{-1}(V)$ otevřená množina $\vdots$ $x \in f^{-1}(V)$

$\underbrace{f^{-1}(V)}_{U} \in Nb_x$ zda $f(U) \subset V$

$f(\underline{f^{-1}(V)) \subset V \text{ platí}}$

$y \in f(\underline{f^{-1}(V)})$ $\exists x \in f^{-1}(V)$ $f(x) = y$

$y = f(x) \in V$

Věta 3.5. Složení spojitých zobrazení je spojité zobrazení.

Důkaz: $f: X \longrightarrow Y$, $g: Y \longrightarrow Z$ – spojitá

ukážeme, že $g \circ f$ – spojité $: X \longrightarrow Z$

$V \in Op(Z)$ musím ukázat, že $(g\circ f)^{-1}(V) \in Op(X)$

$$\underline{(g\circ f)^{-1}(V)} = f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(V)}_{\text{otevřená}})$$

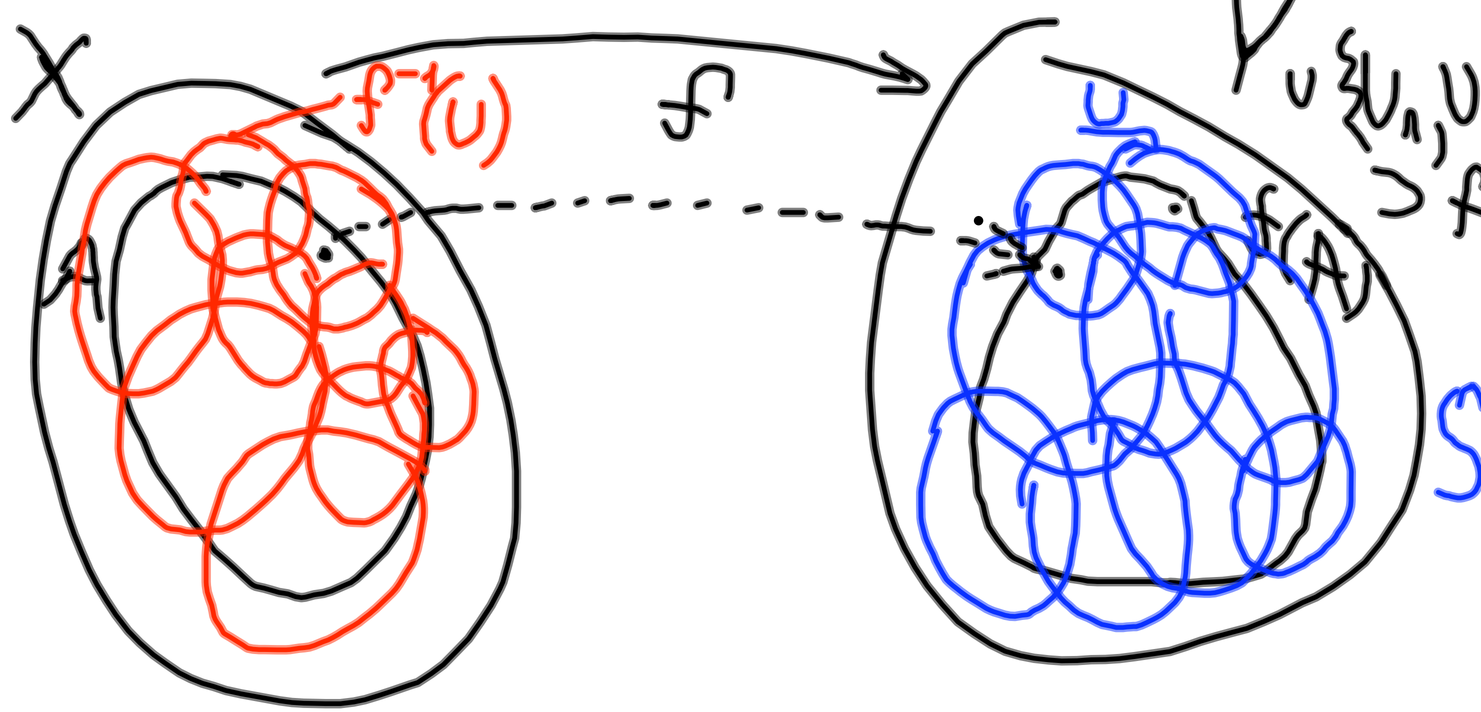
vzor otevřené – V při spoj. g

Věta 3.6 Spojitý obraz kompaktní množiny je kompaktní množina.

Důkaz: $f : X \longrightarrow Y$ – spojité

$A \subset X$ – kompaktní. S – otevřené pokrytí $f(A)$

$S' = \{ f^{-1}(U) \mid U \in S \}$ – otevř. pokrytí A $S'' = \{ f^{-1}(U_1), f^{-1}(U_2), \dots f^{-1}(U_n) \}$



$\bigcup \{U_1, U_2, \dots, U_n\} \supset f(A)$

Věta 3.7. Spojitý obraz souvislé množiny je souvislá množina.

Důkaz předp. $f: X \longrightarrow Y$ spojité a A - souvislá ale $f(A)$ nesouvislá.

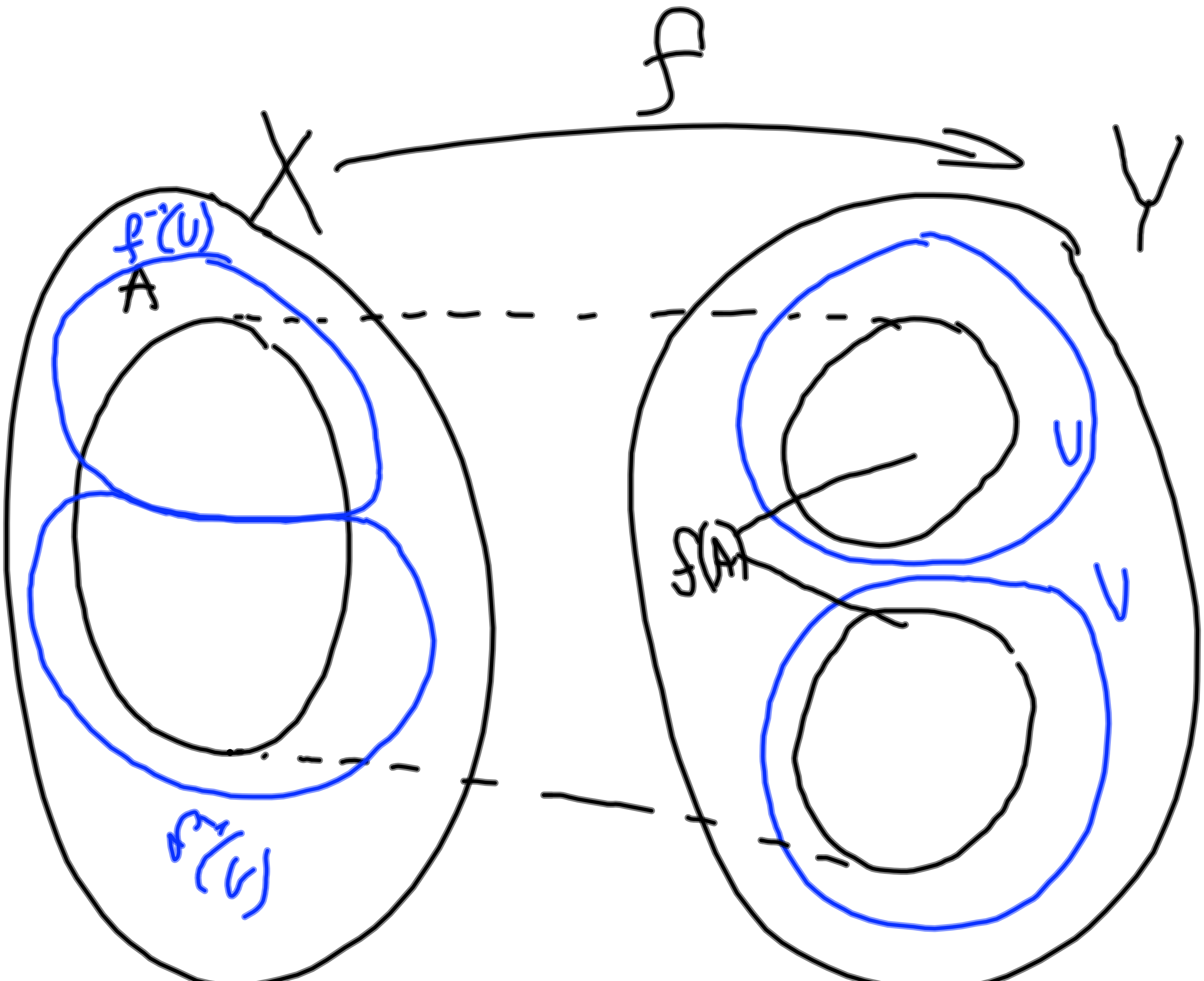
$$f(A) = (U \cap f(A)) \cup (V \cap f(A)) = (U \cup V) \cap f(A)$$

$f^{-1}(U) \cap A$, $f^{-1}(V) \cap A$ - otevřené množiny

$$(f^{-1}(U) \cap A) \cup (f^{-1}(V) \cap A) = (f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)) \cap A =$$

$$= f^{-1}(U \cup V) \cap A \supset f^{-1}(f(A)) \cap A = A$$

$$(f^{-1}(U) \cap A) \cup (f^{-1}(V) \cap A) = A \qquad U \cup V \supset f(A)$$


f
X
Y
$f^{-1}(U)$
A
$f(A)$
U
V
$f^{-1}(V)$

$f: X \longrightarrow Y$ – homeomorfizmus

f – je spojité a f^{-1} – spojité

X a Y jsou homeomorfní $\exists$-li $f: X \longrightarrow Y$ homeomorfizmus

Věta 3.8. Kompozice dvou homeomorfizmů je homeomorfizmus.

Důkaz jasný.

4 TOPOLOGICKÉ VLASTNOSTI MNOŽINY REÁLNÝCH ČÍSEL

$\boxed{A \text{ - otevřená} \iff \forall x \in A\ \exists \text{ otevř. interval } I \ni x, \text{ že } I \subset A}$

Věta 4.1 Systém takto definovaných množin je topologi

Důkaz: Ax.1. $\emptyset, \mathbb{R}$ - splňují.

Ax.2. U, V - ot. $x \in U \cap V$ $x \in I \subset U$, $x \in J \subset V$

$x \in \underline{I \cap J} \subset U \cap V$

Ax.3. S - systém ot. množin $\cup S$, $x \in \cup S$ tzn.

$\exists A \in S : x \in A \dots x \in I \subset A \quad I \subset \cup S$

Lemma 4.2. $X \subset \mathbb{R}$ o vlastnosti: je-li $x, y \in X$ tak $[x, y] \subset X$. Potom X je interval.

Důkaz: $\underset{b}{\sup X}$, $\underset{a}{\inf X}$ – existují

$$a < c < b$$

$$a < \underset{\in X}{x} < c \qquad c < \underset{\in X}{y} < b$$

$$x < c < y$$

$$c \in [x, y] \subset X$$

Věta 4.3 $X\subset\mathbb{R}$, $X\neq\emptyset$ potom, násl. podm. ekviv.

1. X – je souvislá;
2. X – je interval.

Důkaz: Předpokládejme, že X – interval je nesouvislý

$$\exists\, U,V\in Op \quad X=(\underset{\substack{\ni\\ x}}{U\cap X})\cup(\underset{\substack{\ni\\ y}}{V\cap X}) \qquad x<y$$

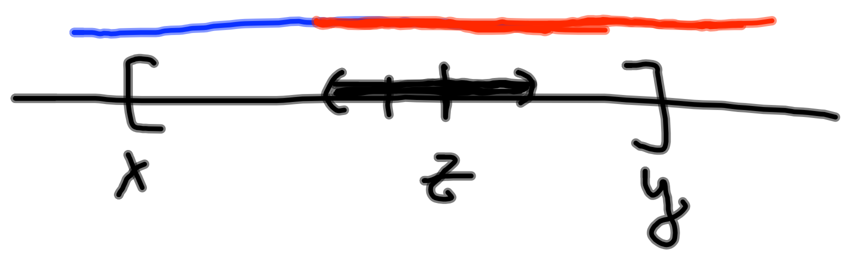
$$[x,y]\subset X$$

$$(\underbrace{U\cap[x,y]})\cup(V\cap[x,y])$$

$$z=\sup U\cap[x,y]$$

~~$z\in U\cap[x,y]$~~

~~$z\in V\cap[x,y]$~~



Predpokládejme, že X není interval

$x, y \in X$ a bod $z \in [x, y]$

$x < z < y \quad z \notin X$

$U = (-\infty, z)$

$V = (z, \infty)$

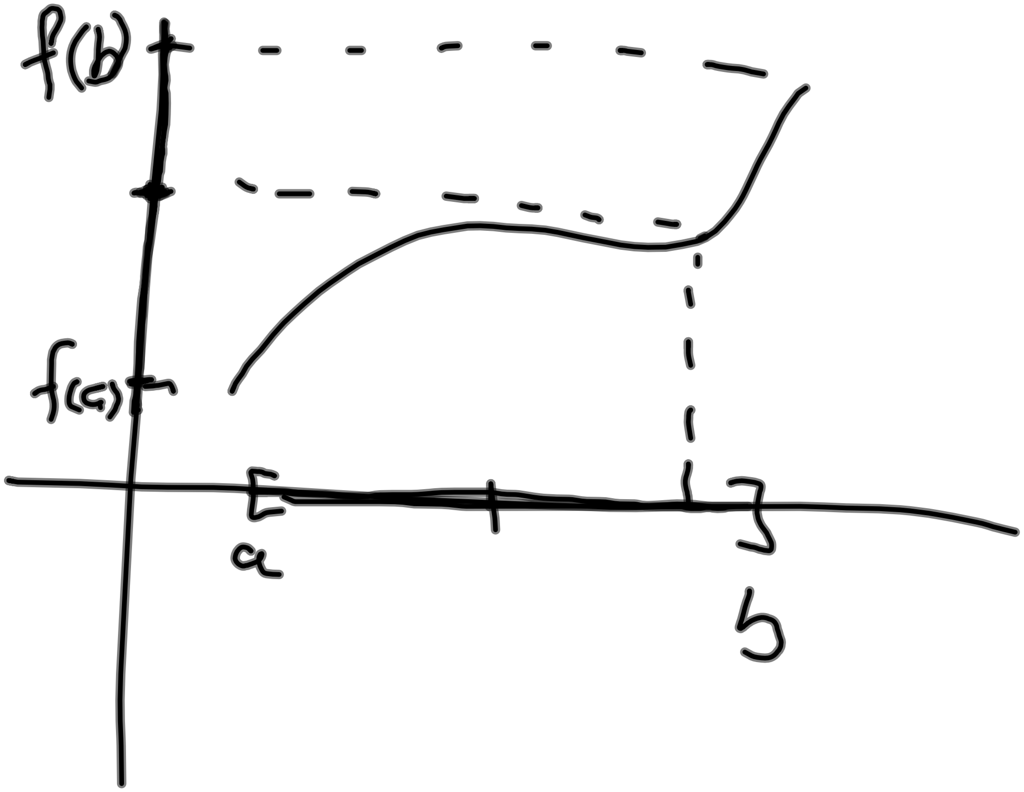
$$X = (U \cap X) \cup (V \cap X)$$

Důsledek 4.4. (Bolzano) Spojitý obraz interv. je interval.

Důsledek 4.5 (Darboux) $f [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ - spoji

$f(a) < f(b)$ potom $\forall c \in (f(a), f(b))$ existuje $x \in [a, b]$

$f(x) = c$



f(b)
f(a)
a
b