Absolutní hodnota

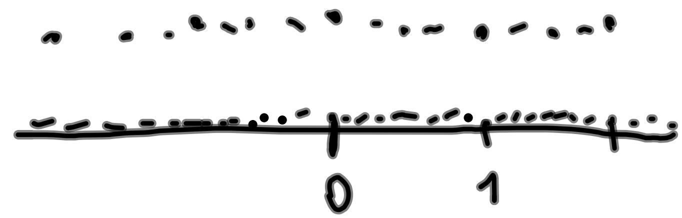
$| \ | : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

Celá část

$[x]$ - největší celé číslo, menší nebo rovno x.

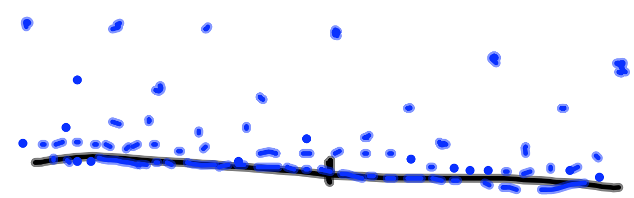
Dirichletova funkce $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$



Riemannova funkce ϱ

$$\varrho(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$



ZÁKLADY TOPOLOGIE

X – množina, S – systém množin na X

$S \subset \exp X$, S

S – topologie na X

Axiom 1: $\emptyset, X \in S$

Axiom 2: Je-li $U, V \in S$, potom $U \cap V \in S$

Axiom 3: Je-li $S' \subset S$, potom $\bigcup S' \in S$

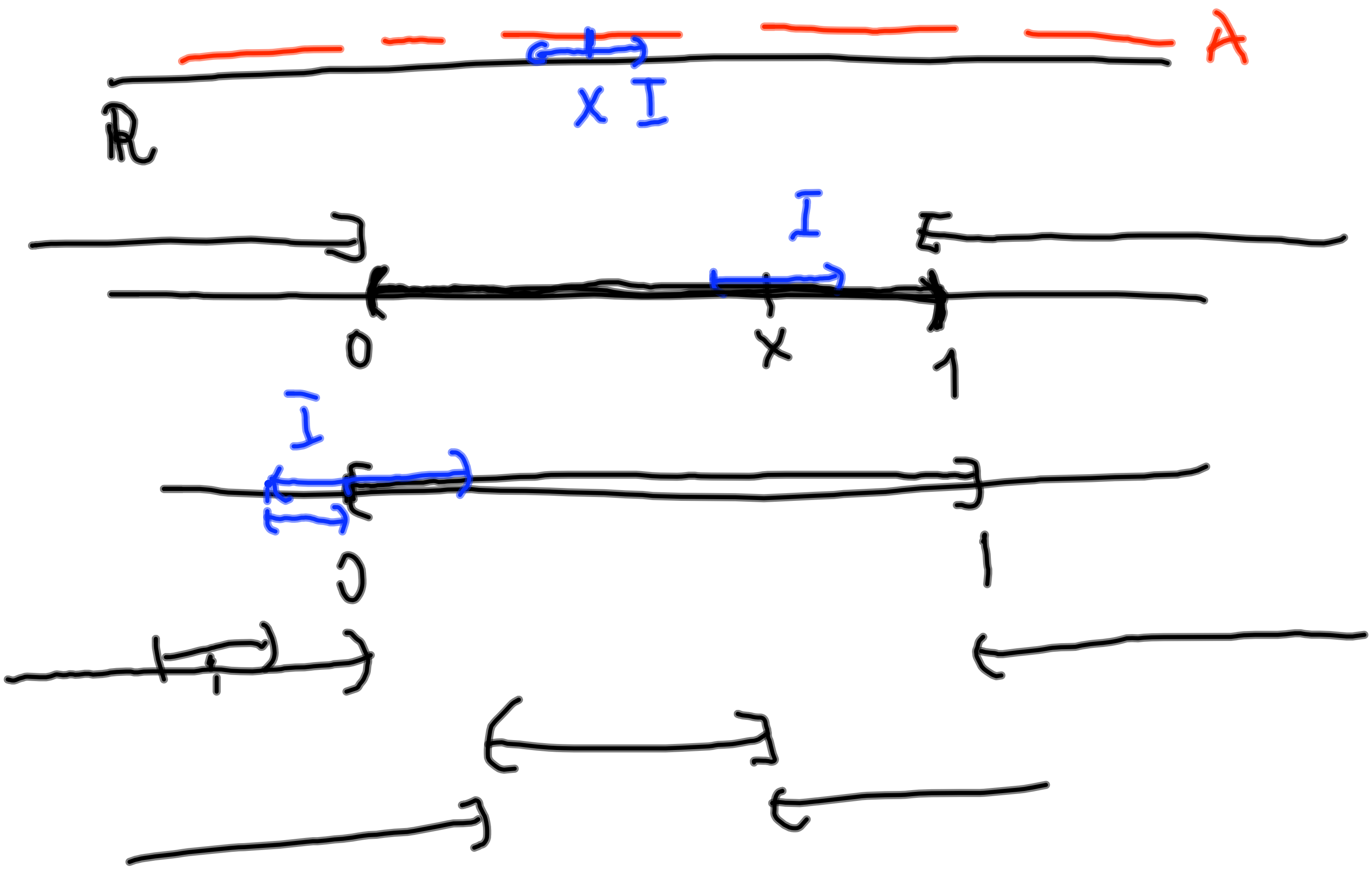
Př: $X = \{1,2,3\}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ – triviální topologie

$\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{1\}\}$, $\mathcal{T} = \{\underbrace{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}}\}$

$\bigcup S' = \{1,2\}$ $S' = \{\{1\},\{2\}\}$

Přirozená topologie na $\mathbb{R}$

$\mathcal{T} \ni A \iff \forall x \in A\ \exists$ otevřený interval $I \ni x$ takový, že $I \subset A$



$X, \mathcal{T} \quad Y \subset X$

$$\mathcal{T}_Y = \{ U \cap Y \mid U \in \mathcal{T} \}$$

Věta 3.1 Systém $\mathcal{T}_Y$ je topologie na Y

Důkaz: <u>Ax 1.</u> $\emptyset \in \mathcal{T}_Y$, $\emptyset \in \mathcal{T}$, $U = \emptyset$, $U \cap \emptyset = \emptyset \in \mathcal{T}_Y$

$Y \in \mathcal{T}_Y$, $X \in \mathcal{T}$, $U = X$, $X \cap Y = Y \in \mathcal{T}_Y$

Ax. 2, $A, B \in \mathcal{T}_Y$; $A = U \cap Y \quad U \in \mathcal{T}$

$B = V \cap Y \quad V \in \mathcal{T}$

$$A \cap B = (U \cap Y) \cap (V \cap Y) = \underbrace{U \cap V}_{\in \mathcal{T}} \cap Y \in \mathcal{T}_Y$$

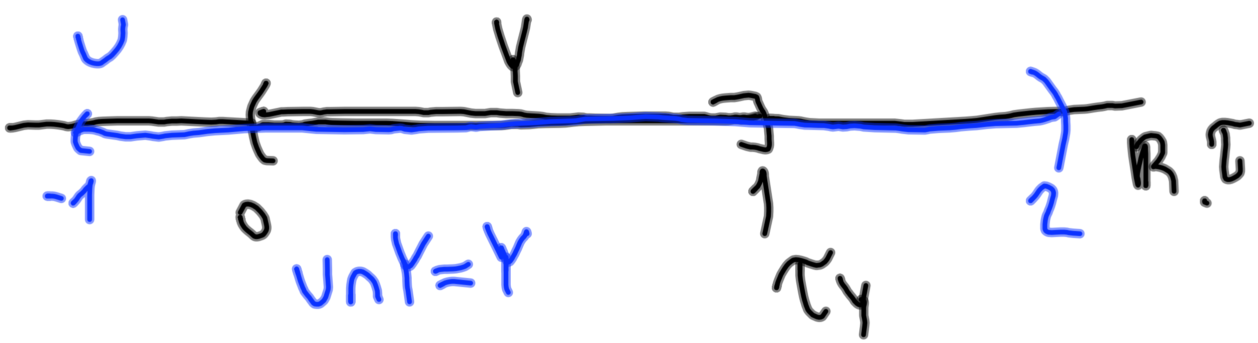
Ax. 3. $S' \subset \tau_Y$ .... $\cup S' \in \tau_Y$

$S' \in \tau_Y$ ..... S

$S' = \{U \cap Y, U \in S\}$ $\quad S \subset \tau$

$$\underline{\cup S'} = \cup\{U \cap Y, U \in S\} = \underbrace{\cup\{U, U \in S\}}_{\cup S \in \tau} \cap Y \in \tau_Y$$

τ_Y - indukovaná topologie na Y



X, τ. $Y \subset X$

$x \in X$

① $\exists$ okolí U x takové, že $U \subset Y$ – x vnitřní bod Y

② $\exists$ okolí U x takové, že $U \subset X \setminus Y$ vnější bod Y

③ $\forall$ okolí U x $U \cap Y \neq \emptyset$, $U \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset$ hraniční bod Y

$\operatorname{int} Y$ – vnitřek Y

$\operatorname{ext} Y$ – vnějšek Y

$\operatorname{fr} Y$ – hranice Y

$\operatorname{cl} Y = Y \cup \operatorname{fr} Y$ – uzávěr Y

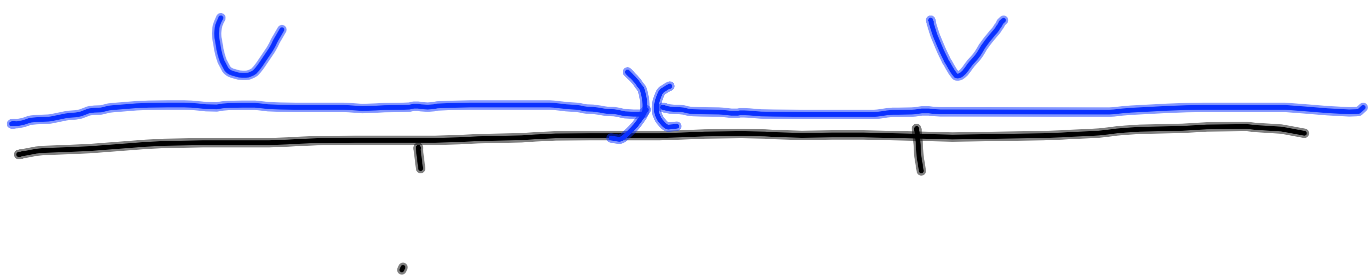
X, τ nesouvislý $\Leftrightarrow \exists U, V \in \tau$, $V, U \neq \emptyset$ disjunktní

$$X = U \cup V$$

- Hausdorffův $\forall x, y \in X$ $x \neq y$

$\exists$ okolí U bodu x, V okolí y takové, že

$$U \cap V = \emptyset$$



X, τ

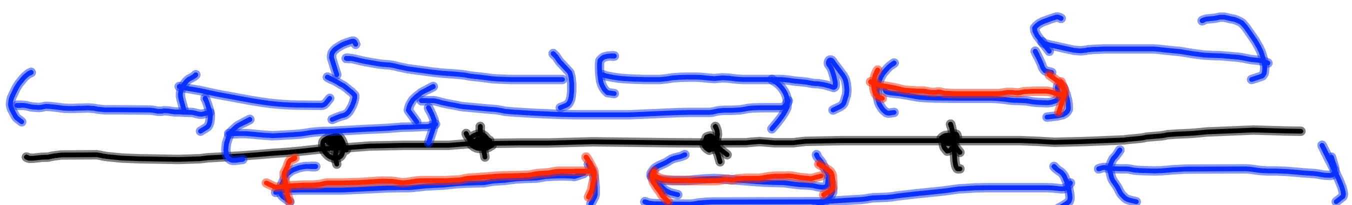
Y – kompaktní $\iff$ z každého otevřeného pokrytí Y můžu vybrat konečné podpokrytí

S – pokrytí Y $\quad \bigcup S \supset Y$

– otevřené $S \subset \tau$

– konečné S – konečný

S' – podpokrytí S, $S' \subset S$



Věta 3.2 V každém Hausdorffově prostoru je každá kompaktní množina uzavřená.

Důkaz: X – Hausdorff., A – komp $\subset X$

$X \setminus A$ – otevřená?

$x \in X \setminus A$

$$S = \{ U_a \mid a \in A,\ \overset{Nb\,a}{U_a} \cap \overset{\in Nb\,x}{V_a} = \emptyset \} \text{ – pokrytí}$$

$$S' = \{ U_{a_1}, U_{a_2}, \dots, U_{a_n} \} \text{ konečné podpokrytí}$$

$$V = V_{a_1} \cap V_{a_2} \cap \dots \cap V_{a_n}$$

$$V \cap \underset{\substack{\cup \\ A}}{\left(\cup S' \right)} = \emptyset \qquad V \cap A = \emptyset \qquad V \subset (X \setminus A)$$

V – okolí x

Věta 3.3 Uzavřená podmnožina kompaktní množiny je kompaktní.

Důkaz $A \subset Y$, $A \in Cl$, $Y \in Comp$

Mějme S ot. pokrytí A

$S' = S \cup \{X \setminus A\}$ - ot. pokrytí Y

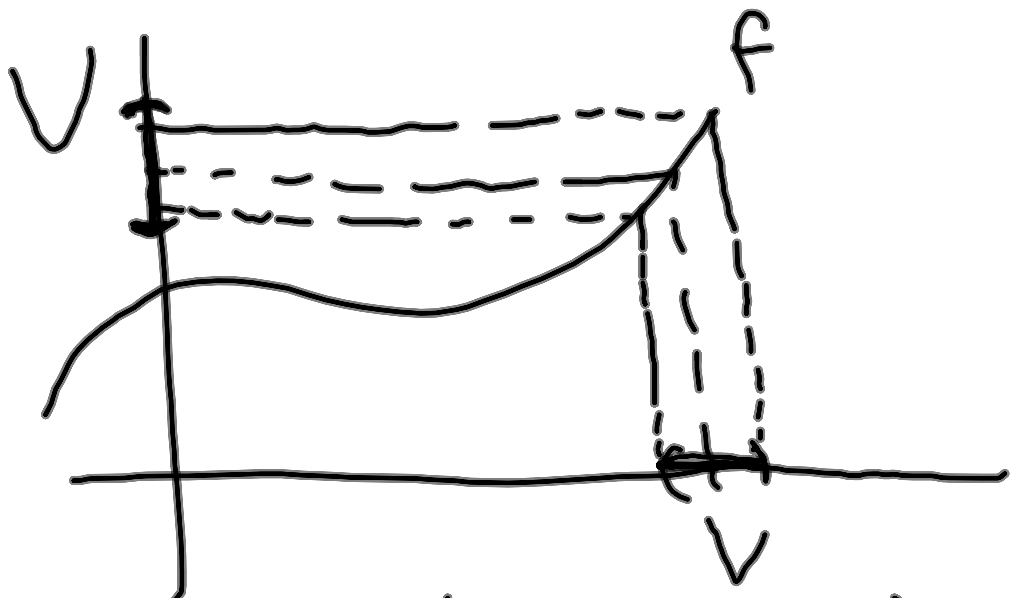
S'' - konečné podpokrytí S'

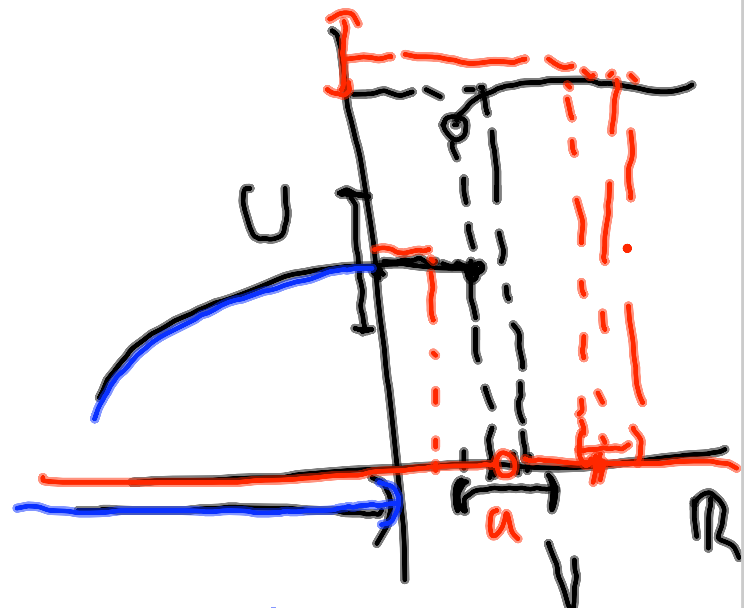
$\cup (S'' \setminus \{X \setminus A\}) \supset A$

$f: X \longrightarrow Y$ – spojité spoj. v každém bodě $x \in X$

f – je spojité v $x \in X$

$\forall U \in Nb_{f(x)} \, \exists V \in Nb_x$ takové, že $f(V) \subset U$





$Z \subset X \quad f|_Z : Z \longrightarrow Y$

$\mathcal{T}_Z$

$f|_{(-\infty,0)}$

$f|_{\mathbb{R}\setminus\{a\}}$

$\mathbb{R}\setminus\{a\}$