X - pole $\quad X \quad \leq$ -uspořádání

úplné $\forall x, y \quad x \leq y$ nebo $y \leq x$

slučitelne s násobením a sčítáním

$\forall x, y, z \in X$

$$x \leq y \text{ potom } x+z \leq y+z \qquad (2.2.1)$$

$$0 \leq x,\ 0 \leq y \text{ potom } 0 \leq xy \qquad (2.2.2)$$

Title: 10. 17-1:07 odp. (1 of 10)

Věta 2.4 V každém uspořádaném poli

1. $0 < 1$
2. Je-li $x+z \leq y+z$ potom $x \leq y$
3. Je-li $0 < x$ potom $0 < x^{-1}$
4. Je-li $0 < z$ potom $xz \leq yz \iff x \leq y$

Důkaz: 1. předp $0 \not< 1$ $\quad \underbrace{1 \leq 0}$, $1 \neq 0$ proto $1 < 0$

Využijeme (2.2.1) pro $x = 1, y = 0, z = -1$

pokud $1 \leq 0$ potom $1 - 1 \leq 0 - 1$

$$\underbrace{0 \leq -1}$$

Využijeme (2.2-2) $x, y = -1$

$0 \leq -1$ potom $0 \leq (-1)(-1) = 1$

$1 \leq 0,\ 0 \leq 1 \quad 1 = 0$

2. $x+z \leq y+z \Longrightarrow x \leq y$

Využijeme $(2.2.1)$ $x = x+z$; $y = y+z$; $z = -z$

$x+z \leq y+z \Longrightarrow (x+z)+(-z) \leq (y+z)+(-z)$

$x+(z+(-z)) \leq \ldots\ldots$

$x \leq y.$

4. předp. $\underline{z>0}$; $x \leq y \Longleftrightarrow xz \leq yz$

„$x \leq y \Rightarrow xz \leq yz$"

$x \leq y \Rightarrow \underline{0 \leq y-x}$ z $(2.2.2)$ plyne $0 \leq (y-x)z = yz - xz$

$0 \leq yz - xz$

$xz \leq yz$

3. $0 < x \Longrightarrow 0 < x^{-1}$, předp $\underline{0<x}$ ale $0 \not< x^{-1}$; $\underbrace{x^{-1} \leq 0}$

$\underbrace{xx^{-1} \leq 0x}$ $1 \leq 0$ spor !.

4. předp. $z > 0$; $xz \leq yz \implies x \leq y$

podle 3. $z > 0 \dots z^{-1} > 0$

$$xz \leq yz \overset{(2.2.2)}{\implies} x\underbrace{z z^{-1}} \leq y \underbrace{z z^{-1}}$$

$$x \cdot 1 \leq y \cdot 1$$

$$x \leq y$$

---

odčítání $x - y := x + (-y)$

dělení $x/y := x \cdot y^{-1}$ $y \neq 0$

$(x,y) = \{ z \in X \mid x < z < y \}$ otevřený, vlastní interval

$[x,y] =$ $x \leq z \leq y$ uzavřený

$(x,\infty) = \{ z \in X \mid x < z \}$

$[x,\infty) = \{ z \in X \mid x \leq z \}$ nevlastní intervaly

$(-\infty,x) =$ $z < x$

2.3 REÁLNÁ ČÍSLA

Řekneme, že $X, \leqslant$ je spojitě uspořádané jestliže $\forall Y, Z \subset X$ $Y \leqslant Z$ existuje $x \in X$ takový, že $Y \leqslant x \leqslant Z$ ← (axiom spojitosti)

Každé spojitě uspořádané pole je množina reálných čísel $\mathbb{R}$.

Řekneme že $X \subset \mathbb{R}$ je shora (zdola) ohraničená jestliže existuje $x \in \mathbb{R}$ takový, že $X \leqslant x$ $(x \leqslant X)$.

Věta 2.5 (o supremu)

Každá neprázdná shora ohraničená množina reálných čísel má supremum.

Důkaz Mějme $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, shora ohraničená

$Y = \{y \in \mathbb{R} \mid X \leq y\}$ - horní závory X.

$X \leq Y$ existuje $x \in \mathbb{R}$ $\underline{X \leq x \leq Y}$, $\underline{x = \sup X}$

x – nejmenší horní závora?

1. horní závora?
2. je nejmenší předp. $y < x$; $X \leq y$ ... $y \in Y$ ... $x \not\leq Y$

spor

Věta 2.6 (o infimu)
$\forall$ neprázdná zdola ohraničená množina $\mathbb{R}$ má infimum.

Př.: $[a,b] \leq b$ $\quad b \in [a,b]$ $\quad b = \max[a,b]$

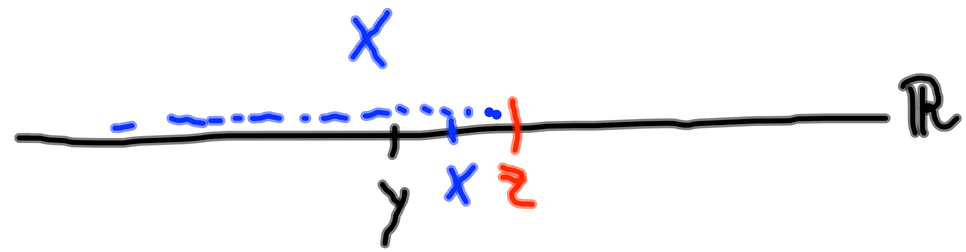
$b = \sup[a,b]$

$(a,b) \leq b$ horní závory $[b,\infty)$

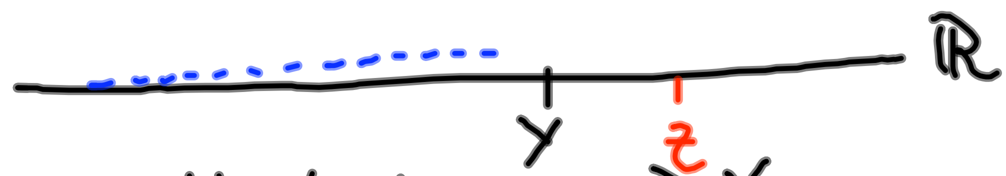
$(a,b) \leq \underline{\underline{[b,\infty)}}$ $\quad b = \sup(a,b)$

Věta 2.7 Následující podm. jsou ekvivalentní.

1. $z = \sup X$,
2. $z \geq X$ a ke každému $y < z$ existuje $x \in X$ takové, že $y \leq x \leq z$



Důkaz



$1. \Rightarrow 2$ $z = \sup X$ triviálně plyne $z \geq X$

$\forall y < z \; \exists x \in X \quad y \leq x \leq z$

$\exists y < z . \; \forall x \in X \quad x \leq y < z$ spor $z = \sup X$.

$X \leq y$

$2 \Rightarrow 1.$ $z \geq X$

$\underline{\forall y < z} \; \exists x \in X \quad y \leq x \leq z$

2.4 PŘIROZENÁ ČÍSLA

$X \subset \mathbb{R}$ Jestliže $1 \in X$, a že $x \in X \Longrightarrow x+1 \in X$

X – je induktivní $\qquad \cap \{[0,\infty), (0,\infty), [1,\infty)\}$

Př: $[0,\infty)$, $(0,\infty)$, $[1,\infty)$ – induktivní

Lemma 2.9 Průnik libovolného systému induktivních množin je induktivní množina.

Důkaz: S – systém induktivních množin

$\cap S \ni 1$ protože všechny prvky S jsou induktiv. množiny

$\cap S \ni x \quad \forall X \in S \ x \in X \quad x+1 \in X$

$\forall X \in S \ x+1 \in X \quad x+1 \in \cap S$

Množina přirozených čísel $\mathbb{N}$
je průnik všech induktivních množin v $\mathbb{R}$