Zobrazení

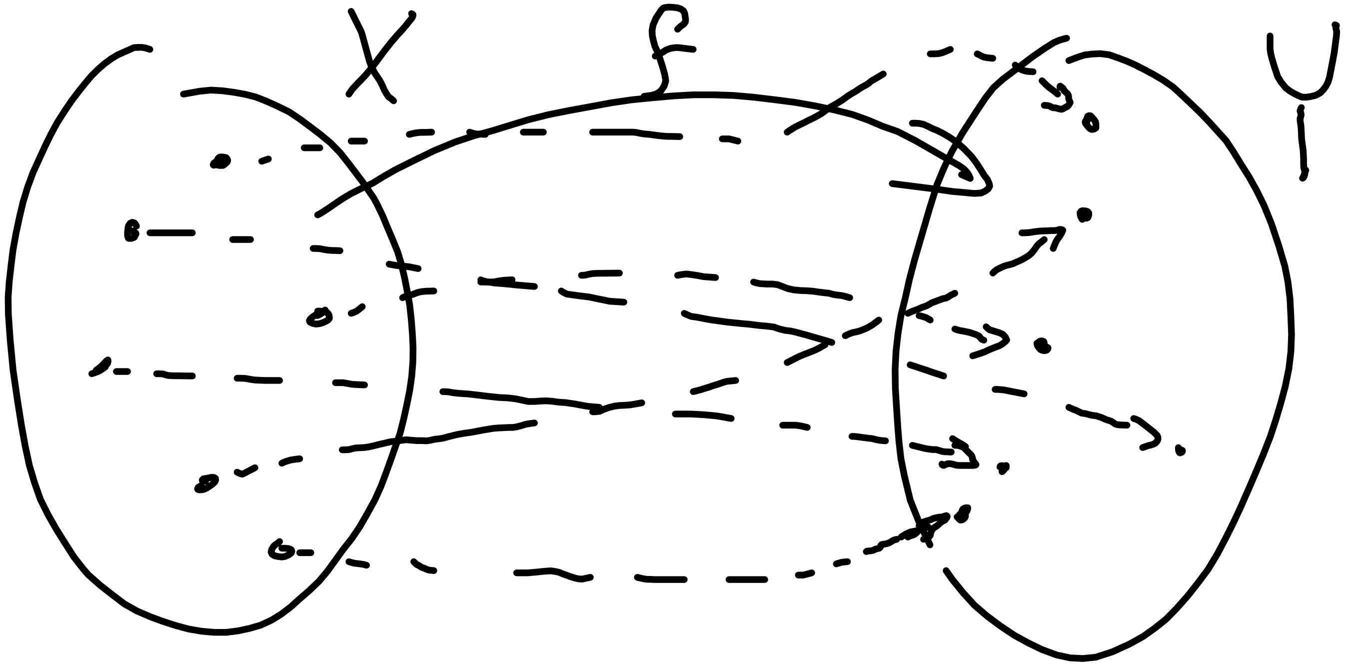
$f: X \longrightarrow Y$

- Řekneme, že $f$ je injektivní (prosté) jestliže $\forall y \in Y$ existuje nejvýše jedno $x \in X$ takové, že $f(x)=y$.
- Řekneme, že $f$ je surjektivní (na) jestliže $\forall y \in Y$ existuje alespoň jedno $x \in X$ takové, že $f(x)=y$.
- Řekneme, že $f$ je bijektivní (vzájemně jednoznač.) jestliže $\forall y \in Y$ existuje právě jedno $x \in X$ takové, že $f(x)=y$.

Když je $f$ surjektivní a injektivní tak je bijektivní.

Když je $f$ bijektivní tak je surjektiv. i injektivní

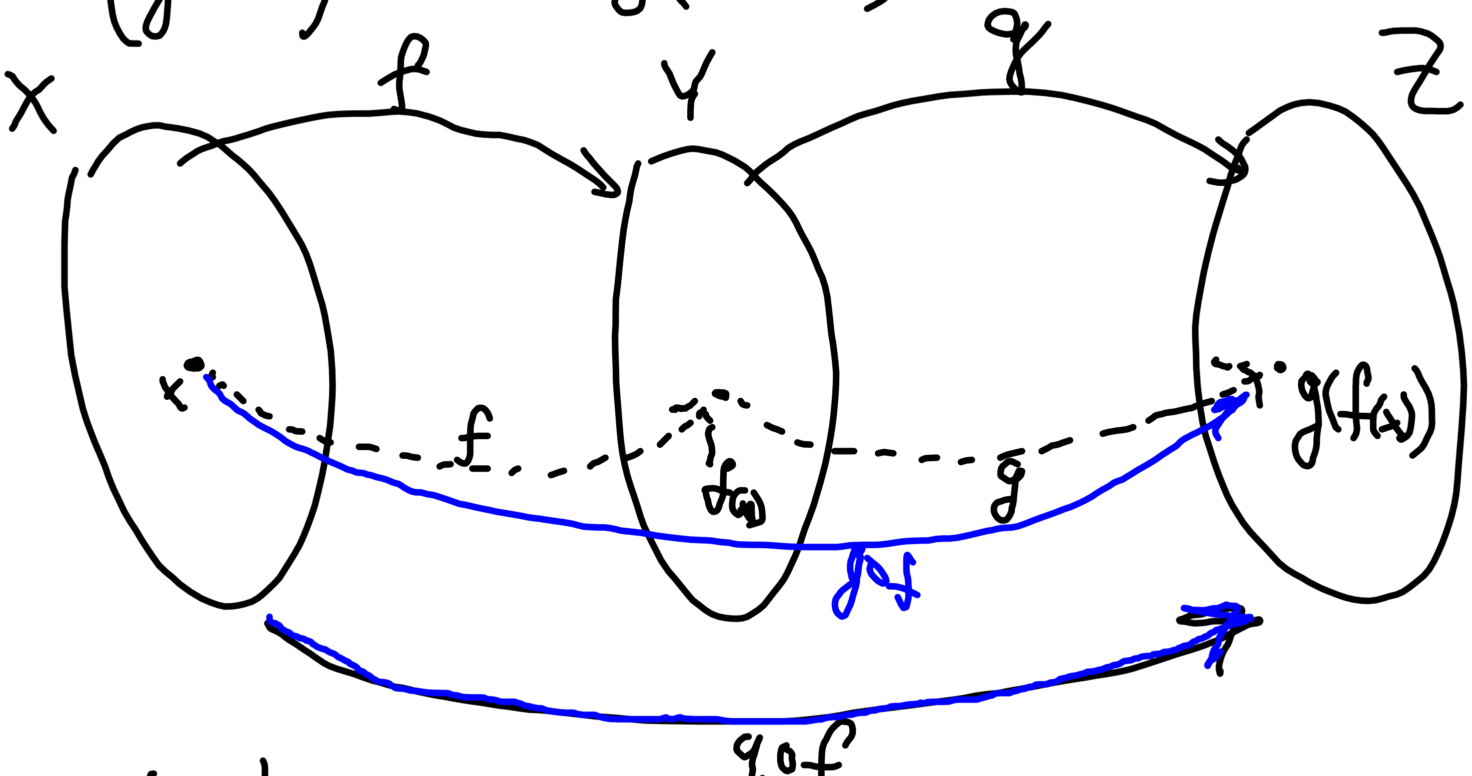
$f$ je bij. $\Longleftrightarrow$ surj. a injektiv.


X
f
Y

Mějme $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$

definujeme $g \circ f : X \to Z$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$




$g \circ f$ - kompozice $f$, a $g$, složené zobrazení

Př.: $X$ - množina:

$id_X : X \longrightarrow X$ $\quad id_X(x) = x$

$Gr\, id_X = \{(x,x) \mid x \in X\}$

$x \in X$ $\quad (?, x)$

---

$X' \subset X$:

$i : X' \longrightarrow X$ $\quad i(x) = x$ $\quad Gr\, i = \{(x,x) \mid x \in X'\}$

injektivní $\quad x \in X$, $\quad (\cancel{x}, x)$

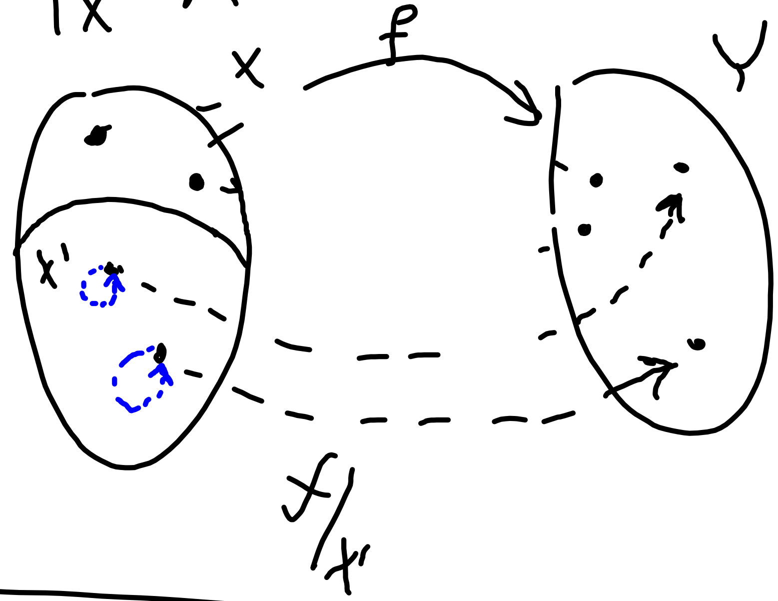
nemusí být surjektivní $\quad (X' \neq X)$

Uvažujme $f: X \longrightarrow Y$, $X' \subset X$

definujeme zobrazení

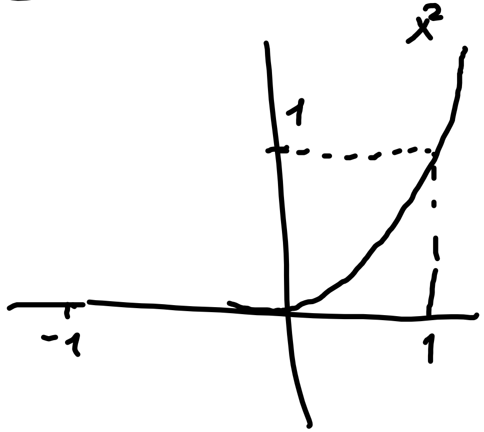
$f|_{X'} = f \circ i$ $\qquad$ $i$ - vložení $X'$ do $X$

$f|_{X'}: X' \longrightarrow Y$




$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad$ $f(x) = x^2$

$f|_{\mathbb{R}^+}: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$



Věta 1.3

Mějme zobrazení $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$, $h: Z \to U$

platí

$$\underbrace{(h \circ g) \circ f}_{X \to U} = \underbrace{h \circ (g \circ f)}_{X \to U}$$

Důkaz:

Zda-li $\forall x \in X$ platí $((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ (g \circ f))(x)$

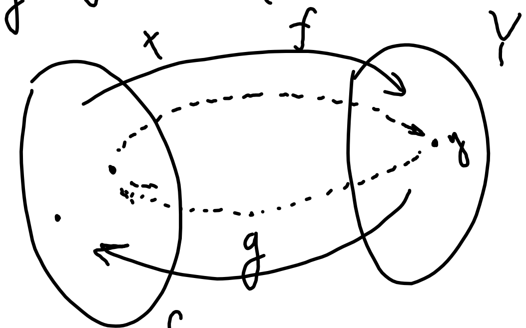
$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$$

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$$

$f: X \to Y$, $g: Y \to X$

Řekneme, že $g$ je inverzní k $f$ když

$$f \circ g = id_Y$$
$$g \circ f = id_X$$




$g$ - inverze $f$.

Věta 1.4

Každé zobrazení $f: X \to Y$ má nanejvýše jednu inverzi.

Důkaz: Předpokládejme, že $g_1, g_2: Y \to X$ jsou dvě různé inverze

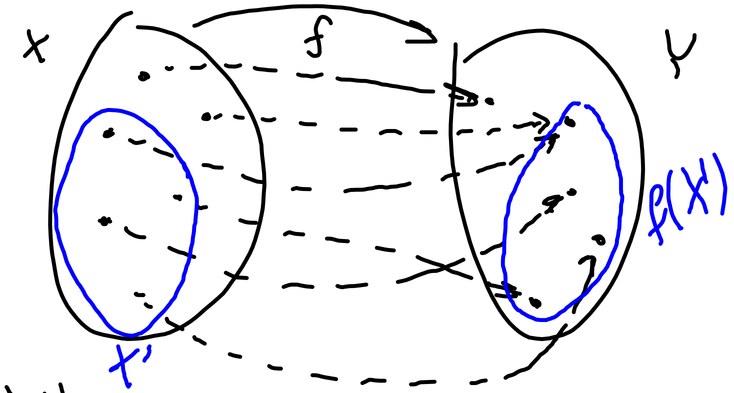
$$g_1 = g_1 \circ id_Y = g_1 \circ (f \circ g_2) = (g_1 \circ f) \circ g_2 =$$
$$= id_X \circ g_2 = g_2$$

$f: X \to Y$, $f^{-1}$ – inverze $f$.
invertibilní

$f : X \longrightarrow Y\ ,\ X' \subset X$

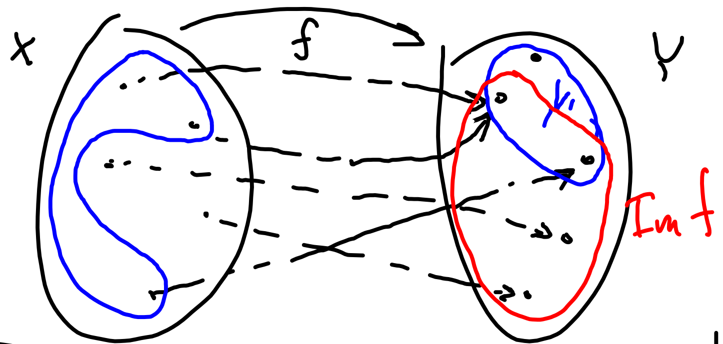
$f(X') = \{ y \in Y \mid \exists x \in X' : f(x) = y \}$

$= \{ f(x) \mid x \in X' \}$ - obraz $X'$ při $f$




$Y' \subset Y$

$f^{-1}(Y') = \{ x \in X \mid f(x) \in Y' \}$ - vzor $Y'$ při $f$




$\mathrm{Im} f = f(X)$ - obraz zobrazení $f$

# 1.4 BINÁRNÍ RELACE

$X$ - množina, $Z \subset X \times X$

$Gr\,\sigma = Z$ - graf relace

$X = \{a, b, c\}$, $Gr\,\sigma = \{(a,b), (b,c), (a,a)\}$

$(a,b) \in Gr\,\sigma$ — $a \sigma b$

$(a,a) \in Gr =$ $\quad Gr(=) = \{(a,a), (b,b), (c,c)\}$

$a = a$

$\sigma$ - relace

Reflexivní $\Leftrightarrow \forall x \in X$ platí $x \sigma x$

Symetrická $\Leftrightarrow$ je-li $a \sigma b$ pak $b \sigma a$

Tranzitivní $\Leftrightarrow$ když $a \sigma b$, $b \sigma c$ pak i $a \sigma c$

Ekvivalence

Antisymetrická $\Leftrightarrow$ z $a \sigma b$ a $b \sigma a$ plyne $a = b$

Uspořádání

$\mathbb{N}$ $\leq$ reflexivní? $\forall n$ $n \leq n$

tranzitivní? $a \leq b \leq c \dots a \leq c$

antisymetrická $n \leq m$ $m \leq n \dots n = m$

$\exp X$ $\subset$

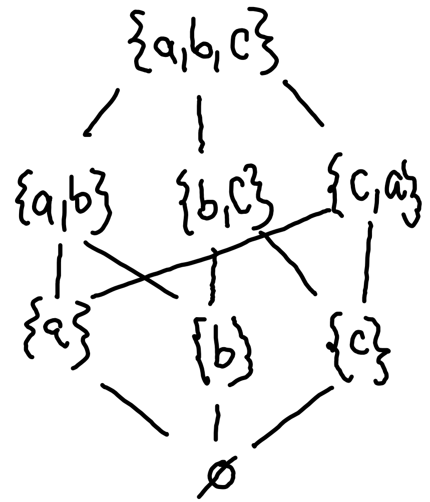
$X' \subset X'$

$X' \subset Y'$, $Y' \subset Z' \dots\dots X' \subset Z'$

$X' \subset Y'$, $Y' \subset X' \dots\dots Y' = X'$

$\{1, 2, 3\} = X$


$\exp\{a, b, c\}$ „$\subset$"

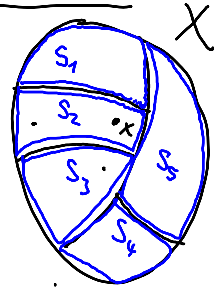


# 1.5 EKVIVALENCE A ROZKLADY

$X$ - množina

Rozklad $X$ je systém $S$ množin $X$ s vlastnostmi

- $\cup S = X$
- $Y, Z \in S,\ Y \neq Z$ potom $Y \cap Z = \emptyset$
- $\emptyset \notin S$



$S = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$

$[x]_S = S_2 \ldots x \in S_2$

$[y]_S = S_2 \ldots y \in S_2$

definujeme $x \in X$

$[x]_S$ - ta množina $S$ v níž $x$ leží

$\pi : X \to S \quad \pi(x) = [x]_S$ projekce faktorová

definujeme relaci $\sim$ na $X$

$$x \sim y \iff [x]_S = [y]_S \qquad (1.5.1)$$

Věta 1.6

Relace $\sim$ def. (1.5.1) je ekvivalence.

Důk.:

① Reflexivní $x \sim x \ldots [x]_S = [x]_S$ ✓

② Symetrická $x \sim y \Rightarrow y \sim x$

$[x]_S = [y]_S \overset{?}{\Rightarrow} [y]_S = [x]_S$ ✓

③ Tranzitivita $x \sim y, y \sim z \ldots x \sim z$

$[x]_S = [y]_S \quad [y]_S = [z]_S \ldots [x]_S = [z]_S$ ✓