Věta 1.7 Jsou-li $P(x,y)$, $Q(x,y)$ sp. fce na oblasti Ω v níž leží křivka γ, pak pro výpočet křivkového integrálu 2. druhu platí vztah

$$\int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_a^b \Big[P\big(x(t),y(t)\big)\dot{x}(t) + Q\big(x(t),y(t)\big)\dot{y}(t)\Big]dt$$

(P2) Vypočtěte $\int_\gamma y^2\,dx + x\,dy$, jestliže γ je:

(a) úsečka spojující body $[-5,-3]$, $[0,2]$

(b) parabola $y = 4 - x^2$ spojující tytéž body

(a) γ: $x = -5 + 5t$, $y = -3 + 5t$, $t \in \langle 0, 1\rangle$, $\dot{x}(t) = 5$, $\dot{y}(t) = 5$

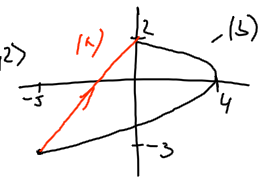
$$\int_\gamma \cdot/. = \int_0^1 \big[(5t-3)^2 5 + (5t-5)5\big]dt =$$

$$= \cdots = -\frac{5}{6}$$

(b) $x = 4 - t^2$, $y = t$, $t \in \langle -3, 2\rangle$

$\dot{x}(t) = -2t$

$\dot{y}(t) = 1$



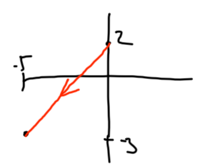
$$\int_\gamma \cdot/. = \int_{-3}^{2} \Big[t^2(-2t) + (4-t^2)\cdot 1\Big]dt =$$

$$= \cdots = \frac{245}{6}$$

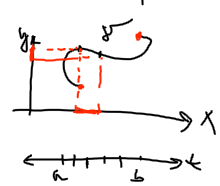
Pozn (1) . . . .

(2) případ (a)

$x = 0 - 5t$, $y = 2 - 5t$, $t \in \langle 0, 1\rangle$



$$\int_\gamma \cdot/. = \frac{5}{6}$$



Def. 1.8 Říkáme, že rovinná křivka γ daná rovnicemi $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in\langle a,b\rangle$ je vzhledem ke svému parametrickému vyjádření orientována

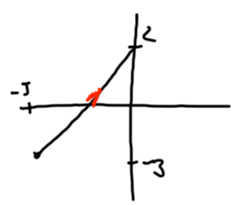
(a) kladně, jsou-li její body uspořádány tak, že pro libovolné dvě hodnoty $t_1,t_2\in\langle a,b\rangle$ $t_1<t_2$ je bod $P_1=[x(t_1),y(t_1)]$ vždy <u>před</u> bodem $P_2=[x(t_2),y(t_2)]$, píšeme <u>$P_1 \prec P_2$</u>.

(b) záporně — " — " — " — " — " — " — " — " — " — " — <u>za</u> " — " — " — " — " — <u>$P_1 \succ P_2$</u>

$\boxed{\text{Pozn.}}$ Vztah pro výpočet křivkového int. 2. druhu upravíme takto

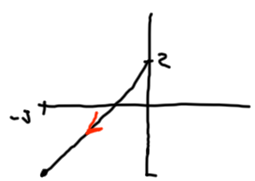
$$\int_\gamma P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\varepsilon\int_a^b\Big[P(x(t),y(t))\,\dot{x}(t)+Q(x(t),y(t))\,\dot{y}(t)\Big]dt$$

kde $\varepsilon=1$ resp. $\varepsilon=-1$, jestliže je křivka γ orientována vzhledem ke své parametrizaci kladně resp. záporně.



$x=-5+5t$, $y=-3+5t$, $t\in\langle 0,1\rangle$, $\varepsilon=1$, $\int_\gamma \ldots = -\frac{5}{6}$

$x=-5t$, $y=2-5t$, $t\in\langle 0,1\rangle$, $\varepsilon=-1$, $\int_\gamma \ldots = -\frac{5}{6}$



$\varepsilon=-1$, $\int_\gamma \ldots = \frac{5}{6}$

$\varepsilon=1$, $\int_\gamma \ldots = \frac{5}{6}$

Def. 1.9 Uzavřená křivka γ se nazývá kladně orientovaná vzhledem k oblasti Ω, kterou ohraničuje, je-li orientovaná tak, že pozorovateli, který se po ní pohybuje zůstává oblast Ω po levé ruce.

Věta 1.10 (Greenova)

Nechť jsou splněny následující předpoklady

(1) γ je jednoduchá, po částech hladká, uzavřená křivka, která je kladně orientovaná vzhledem k oblasti, kterou ohraničuje

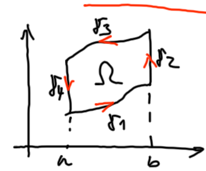
(2) Oblast Ω ohraničená křivkou γ je normální vzhledem k oběma osám

(3) Fce $P(x,y)$, $Q(x,y)$ jsou na oblasti Ω sp. diferencovatelné.

Pak platí

$$\int_\gamma P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\iint_\Omega\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$

Důkaz: $\underline{\iint_\Omega \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_\gamma P(x,y)\,dx}$



γ_1: $y=g_1(x)$ $\quad x=t,\ y=g_1(t),\ t\in\langle a,b\rangle$

γ_2: $x=b$ $\quad x=b,\ y=t$

γ_3: $y=g_2(x)$ $\quad x=t,\ y=g_2(t)$

γ_4: $x=a$ $\quad x=a,\ y=t$

$$\iint_\Omega \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy=\int_a^b\left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)}\frac{\partial P}{\partial y}\,dy\right)dx=$$

$$\int_a^b \Big[P(x,y)\Big]_{g_1(x)}^{g_2(x)}dx=\boxed{\int_a^b\Big[P(x,g_2(x))-P(x,g_1(x))\Big]dx}$$

$$\int_\gamma P(x,y)\,dx=\left(\int_{\gamma_1}+\int_{\gamma_2}+\int_{\gamma_3}+\int_{\gamma_4}\right)P(x,y)\,dx=$$

$$=\underbrace{\int_a^b P(t,g_1(t))\,dt}_{(\gamma_1)}\ \underbrace{-\int_a^b P(t,g_2)\,dt}_{(\gamma_3)}+\underbrace{\int_{g_1(b)}^{g_2(b)}P(b,t)\cdot 0\,dt}_{(\gamma_2)}$$

$$+\int_{g_1(a)}^{g_2(a)}P(a,t)\cdot 0\,dt$$

Př. Vypočtěte $\int_\gamma x^4\,dx + xy\,dy$, kde γ je křivka spojující body $[0,0]$; $[1,0]$; $[0,1]$; $[0,0]$ orientovaná kladně vzhl. k oblasti Ω.

$$\int_\gamma x^4\,dx + xy\,dy = \iint_\Omega y\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} y\,dy \right) dx = \dots = \frac{1}{6}$$

Def. 2.1 Nechť jsou fce $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$ sp. na oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Množinu bodů $\mathcal{S}$ tvaru

$$\mathcal{S} = \{[x(u,v), y(u,v), z(u,v)], [u,v] \in \Omega\}$$

nazýváme plochou v prostoru.

Př. $x^2+y^2+z^2=r^2$

$\downarrow$

sférické souřadnice

r, φ, ϑ

Př. válcová plocha

$\downarrow$

cylindrické souř.

Př. $z = f(x,y)$

$x = u$

$y = v$

$z = f(u,v)$

Def. 2.2 Plocha $\mathcal{S}$ se nazývá hladká, jestliže fce $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$ mají sp. parc. derivace 1. řádu a pro jakobiány J_1, J_2, J_3 tvaru

$$J_1 = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}, \quad J_2 = \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}, \quad J_3 = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$$

platí $J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 > 0$. (pro $\forall\, [u,v] \in \Omega$)