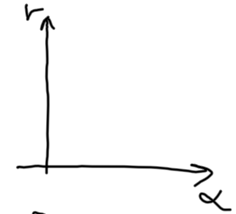
$$x = r\cdot\cos\alpha = \varphi(r,\alpha)$$
$$y = r\cdot\sin\alpha = \psi(r,\alpha)$$



$[r, \alpha + 2k\pi]$

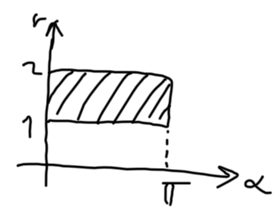
$r \in \langle 0, \infty)$
$\alpha \in \langle 0, 2\pi)$

$$J(\varphi,\psi) = \begin{vmatrix} \varphi_r & \varphi_\alpha \\ \psi_r & \psi_\alpha \end{vmatrix} = r$$

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\Omega^*} f(r\cdot\cos\alpha, r\sin\alpha)\, r\,dr\,d\alpha$$

Př: $\iint_\Omega (3x+4y^2)\,dx\,dy$

Ω – osou x
– horními půloblouky kružnic
$x^2+y^2=1$
$x^2+y^2=4$



$$\iint_\Omega (3x+4y^2)\,dx\,dy = \int_1^2 \left(\int_0^\pi (3\cdot r\cdot\cos\alpha + 4r^2\cdot\sin^2\alpha)\, r\, d\alpha \right) dr$$

$$= \dots\dots = \frac{15}{2}\pi$$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \;?$$

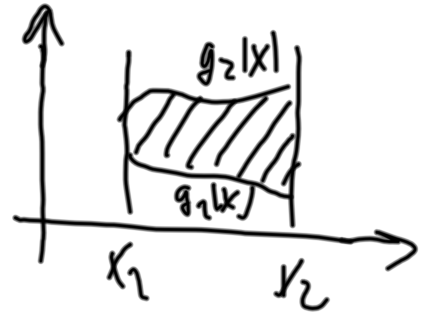
Ω vnoříme do kvádru K

a zavedeme fci $F(x,y,z)$

$$F(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z) & [x,y,z] \in \Omega \\ 0 & [x,y,z] \in K \setminus \Omega \end{cases}$$

Je-li F integrovatelná na K, považujme fci f za integrovatelnou na oblasti Ω a klademe

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{K} F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$



Def. 6 Uzavřená prostorová oblast Ω se nazývá normální vzhledem k rovině xy, jestliže pro všechny její body $[x,y,z]$ platí

$$[x,y] \in \Omega_1 \;, \quad h_1(x,y) \leq z \leq h_2(x,y) \;,$$

kde Ω_1 je kolmý průmět oblasti Ω do roviny xy a fce $h_1(x,y), h_2(x,y)$ jsou sp. na oblasti Ω_1.

Obdobně se definují pojmy normální oblast vzhledem k rovině xz a yz.

Regulární oblast – oblast, kterou lze rozdělit na konečný počet oblastí normálních vzhledem k některé ze souřadnicových rovin.

Věta 6 (Fubiniova)

Jestliže je fce $f(x,y,z)$ spojitá na uzavřené oblasti Ω, která je normální vzhledem k rovině xy, pak platí

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{\Omega_1}\left(\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right)dx\,dy$$

(označení jsme převzali z předcházející definice)

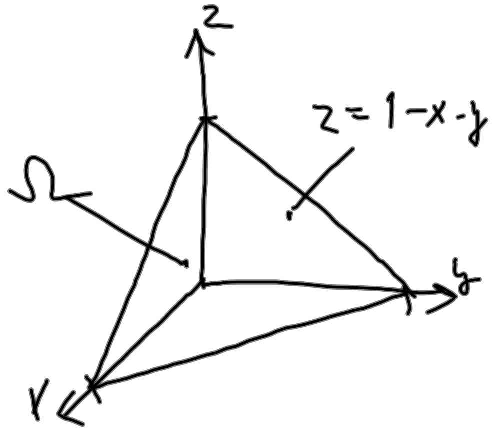
Je-li navíc oblast Ω_1 normální např. k ose x pak platí

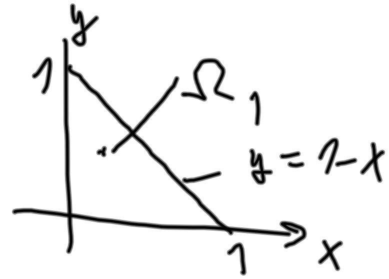
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{x_1}^{x_2}\left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)}\left(\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right)dy\right)dx.$$

Důkaz: analogický k důkazu F.V. pro dvojrozměrný integrál.

(PF) $\iiint_\Omega z\,dx\,dy\,dz$, Ω je čtyřstěn

ohraničený rovinami $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.





$[x,y]\in\Omega_1 \quad 0\le z\le 1-x-y$

$0\le x\le 1$, $0\le y\le 1-x$,

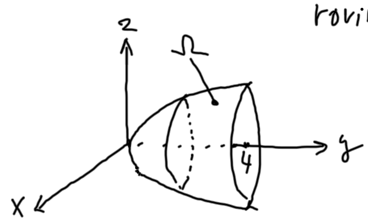
$$\iiint_\Omega z\,dx\,dy\,dz = \int_0^1\left(\int_0^{1-x}\left(\int_0^{1-x-y} z\,dz\right)dy\right)dx =$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\int_0^{1-x}\left[z^2\right]_0^{1-x-y}dy\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^1\left(\int_0^{1-x}(1-x-y)^2\,dy\right)dx$$

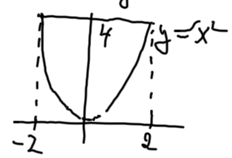
$$= \cdots\cdots = \frac{1}{24}$$

(Pf) $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$

Ω je ohraničená paraboloidem $y=x^2+z^2$
rovinou $y=4$

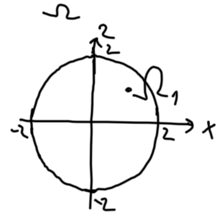


vzhledem k xy



$-2 \le x \le 2$
$x^2 \le y \le 4$
$-\sqrt{y-x^2} \le z \le \sqrt{y-x^2}$

$$\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2+z^2}\,dx\,dy\,dz = \int_{-2}^{2}\left(\int_{x^2}^{4}\left(\int_{-\sqrt{y-x^2}}^{\sqrt{y-x^2}} \sqrt{x^2+z^2}\,dz\right)dy\right)dx$$



$[x,z] \in \Omega_1$
$x^2+z^2 \le y \le 4$

$$\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2+z^2}\,dz\,dy\,dx = \iint_{\Omega_1}\left(\int_{x^2+z^2}^{4} \sqrt{x^2+z^2}\,dy\right)dx\,dz$$

$$= \iint_{\Omega_1} (4-x^2-z^2)\sqrt{x^2+z^2}\,dx\,dz$$
$$[y]_{x^2+z^2}^{4}$$

trace do polárních souřadnic

$r \in \langle 0,2 \rangle$ $\quad x = r\cdot\cos\alpha$
$\alpha \in \langle 0,2\pi)$ $\quad y = r\cdot\sin\alpha$

$$\iint_{\Omega_1}(4-x^2-z^2)\sqrt{x^2+z^2}\,dx\,dz = \int_0^2\int_0^{2\pi}(4-r^2)r^2\,dr\,d\alpha$$

$$= \dots = \frac{128}{15}\pi$$

Věta 4 (o traci trojrozměrných integrálů)

(1) Nechť se vnitřek oblasti Ω^* zobrazí pomocí rovnic

$$x=\varphi(u,v,w),\ y=\psi(u,v,w),\ z=\chi(u,v,w)$$

vzájemně jednoznačně na oblast Ω (zobrazení hraniční plochy oblasti Ω^* nemusí být prosté).

(2) Nechť mají fce φ, ψ, χ sp. parc. der. 1. řádu na Ω^* a fce $f(x,y,z)$ je sp. na Ω.

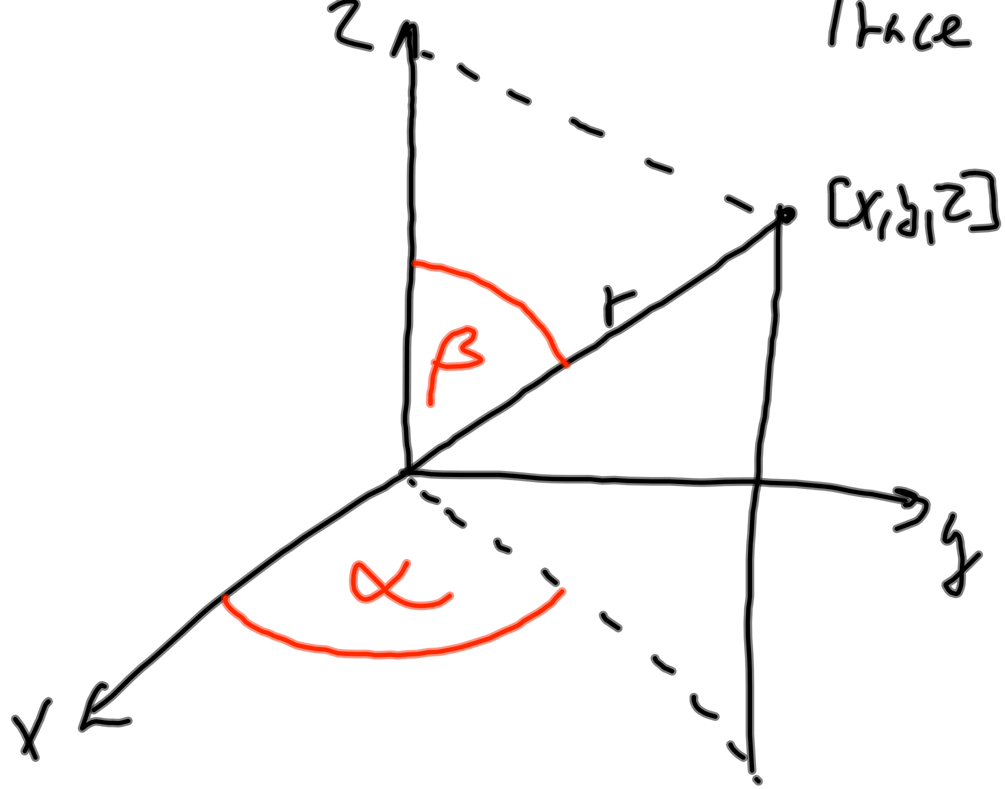
(3) Všude uvnitř oblasti Ω^* je jakobián

$$J(\varphi,\psi,\chi)=\begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v & \varphi_w \\ \psi_u & \psi_v & \psi_w \\ \chi_u & \chi_v & \chi_w \end{vmatrix} \neq 0.$$

Pak platí

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\Omega^*} f(\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w),\chi(u,v,w))\cdot |J|\,du\,dv\,dw$$

Trace do sférických souř.



$$x = r \cdot \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$y = r \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta$$
$$z = r \cdot \cos\beta$$

$$r \in \langle 0, \infty)$$
$$\alpha \in \langle 0, 2\pi)$$
$$\beta \in \langle 0, \pi\rangle$$

$$J(\varphi, \psi, \psi) = \cdots\cdots = -r^2 \sin\beta$$

$$|J| = r^2 \sin\beta$$

Př $\displaystyle\iiint_{\Omega} e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dx\,dy\,dz$

Ω - koule opoloměru 1 se středem v počátku

$$\iiint_{\Omega} \cdot/\cdot = \int_0^1 \left(\int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} e^{r^3} r^2 \cdot \sin\beta \right) dr \right) d\beta \quad d\alpha$$

$$= \cdots\cdots = \frac{4\pi}{3}\left[e-1\right]$$