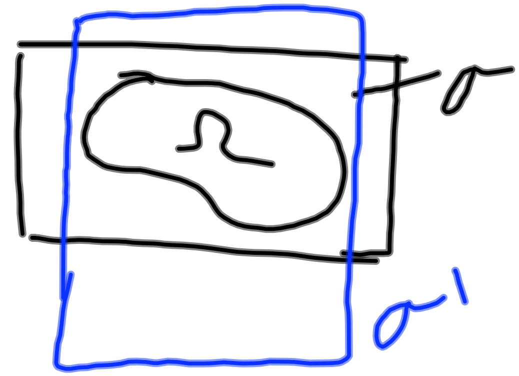
Ω vnoříme do obdélníku σ



$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$$

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & [x,y]\in\Omega \\ 0 & [x,y]\in\sigma\setminus\Omega \end{cases} \qquad (*)$$

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \iint_\sigma F(x,y)\,dx\,dy$$

Def. 5 Uzavřená oblast Ω se nazývá normální vzhledem:

(a) k ose x, jestliže všechny její body $[x,y]$ vyhovují nerovnostem

$$x_1 \le x \le x_2\,; \quad g_1(x) \le y \le g_2(x)\,,$$

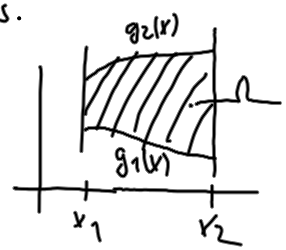
kde $g_1(x), g_2(x)$ jsou sp. fce na $\langle x_1, x_2\rangle$,

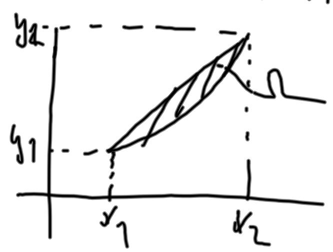
(b) k ose y, — // — // — // —
— // — // —

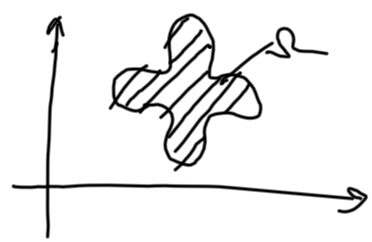
$$y_1 \le y \le y_2\,, \quad g_1(y) \le x \le g_2(y)\,,$$

kde $g_1(y), g_2(y)$ jsou — // — $\langle y_1, y_2\rangle$.

Uzavřená oblast Ω se nazývá regulární, jestliže je možné ji rozdělit na konečně mnoho oblastí normálních vzhledem k některé ze souřadnicových os.







$$y = \psi(x)\,, \quad x = \varphi(y)$$

Věta 3 Fce, která je spojitá na uz. regulární oblasti Ω, je na této oblasti integrovatelná.

Důkaz: $f(x,y)$ sp. na $\Omega \Rightarrow f$ je ohraničená

Zavedeme fci $F(x,y)$ vztahem (*)

Fce $F(x,y)$ má body nespojitosti na hranici oblasti Ω, kterou lze rozdělit na konečný počet křivek $y = \psi(x)$, $x = \varphi(y)$

Pak je $F(x,y)$ integrovatelná na σ a tedy $f(x,y)$ je integr. na Ω. $\square$

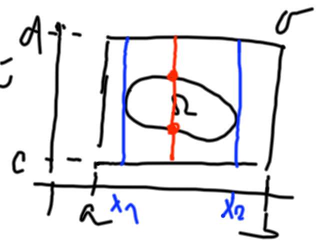
Věta 4 (Fubiniova)

Nechť je fce $f(x,y)$ spojitá na uzavřené oblasti Ω, která je normální vzhledem k ose x. Pak platí

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x_1}^{x_2}\left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx,$$

kde $g_1(x)$ resp. $g_2(x)$ je dolní resp. horní hraniční křivka oblasti Ω.

Důkaz: f sp. $\Rightarrow$ f ohraničená



$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \iint_\sigma F(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_a^b\left(\int_c^d F(x,y)\,dy\right)dx = \underbrace{\int_a^{x_1}\left(\int_c^d F(x,y)\,dy\right)dx}_{=0} + \underline{\int_{x_1}^{x_2}\left(\int_c^d F(x,y)\,dy\right)dx}$$

$$+ \underbrace{\int_{x_2}^b\left(\int_c^d F(x,y)\,dy\right)dx}_{=0}$$

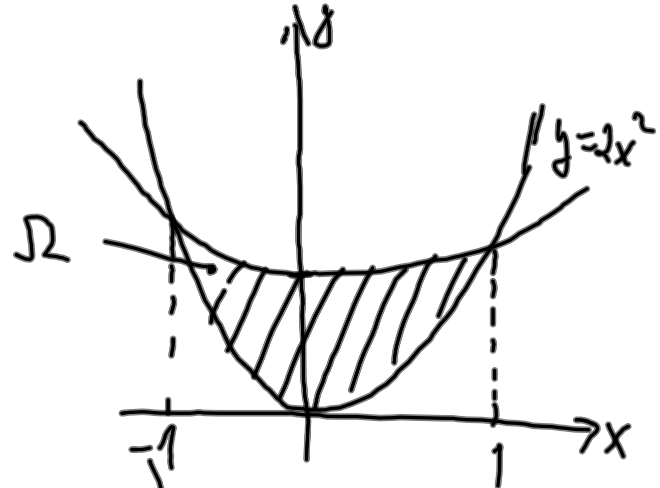
$$\int_c^d F(x,y)\,dy = \left(\underbrace{\int_c^{g_1(x)}}_{=0} + \underline{\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}} + \underbrace{\int_{y_2(x)}^{d}}_{=0}\right)\underline{F(x,y)\,dy} = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy$$

Celkem dostáváme $\displaystyle\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x_1}^{x_2}\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$

$\square$

7. $\iint\limits_{\Omega} (x+2y)\,dx\,dy = ?$

Ω je ohraničená parabolami $y=1+x^2$, $y=2x^2$



$$\iint\limits_{\Omega} (x+2y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\left(\int_{2x^2}^{x^2+1} (x+2y)\,dy\right)dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \Big[xy + y^2\Big]_{2x^2}^{x^2+1}\,dx = \int_{-1}^{1}\Big[x(x^2+1)+(x^2+1)^2 -$$

$$- 2x^3 - 4x^4\Big]\,dx = \ldots\ldots = \frac{32}{15}$$

Do integrálu $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy$ chceme zavést nové proměnné dané vztahy

$$x = \varphi(u,v)$$
$$y = \psi(u,v)$$

$\Omega(x,y)$ $\qquad$ $\Omega^*(u,v)$

obraz $\qquad$ vzor

(1) Jestliže jsou dvěma různým bodům $A_1^* = (u_1, v_1)$, $A_2^* = (u_2, v_2)$ přiřazeny opět dva různé body $A_1 = [x_1, y_1]$, $A_2 = [x_2, y_2]$ hovoříme o prostém (injektivním) zobrazení

(2) Jsou-li fce φ, ψ spojité hovoříme o spojitém zobrazení

(3) Mají-li φ, ψ sp. parc. der. 1. řádu hovoříme o diferencovatelném zobrazení, přičemž determinant tvaru

$$J(\varphi,\psi) = \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix}$$

se nazývá jakobián tohoto zobrazení.

Věta 5 (o transformaci dvojrozměrného integrálu)

(1) Nechť se regulární oblast Ω^* zobrazí pomocí vztahů

$$x = \varphi(u,v)$$
$$y = \psi(u,v)$$

zobrazí na oblast Ω, přičemž zobrazení vnitřku oblasti Ω^* je vzájemně jednoznačné (bijektivní) (zobrazení hraniční křivky oblasti Ω^* nemusí být prosté).

(2) Nechť fce φ, ψ mají spojité parc. der. 1. řádu na Ω^* a fce $f(x,y)$ je spojitá na oblasti Ω.

(3) Nechť jakobián zobrazení $J(\varphi,\psi) \neq 0$ na vnitřku oblasti Ω^*.

Potom platí

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\Omega^*} f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\,|J(\varphi,\psi)|\,du\,dv$$