Def 19 Říkáme, že fce $f(x)$ n-prom. definovaná na oblasti Ω má v bodě $x^* \in \Omega$ extrém vázaný podmínkami

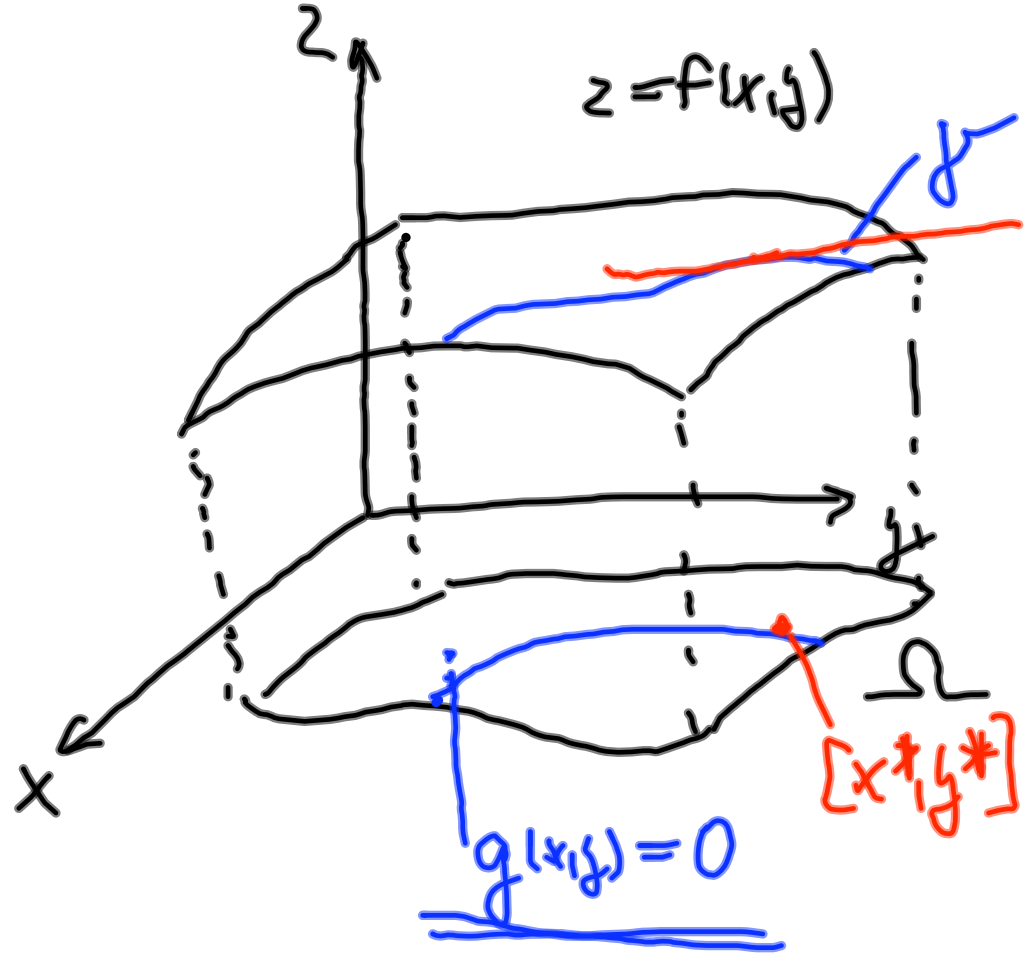
$$g_1(x)=0,\ g_2(x)=0,\ \dots,\ g_m(x)=0 \quad (m<n)$$

jestliže pro všechny body x z vhodného okolí bodu x^*, které vyhovují uvedeným podmínkám platí

$$f(x^*) \le f(x) \quad \text{(vázané lok. minimum)}$$

nebo

$$f(x^*) \ge f(x) \quad \text{(— " — " - maximum)}.$$



z
z = f(x,y)
y
y
x
Ω
[x*,y*]
g(x,y) = 0

Pozn. V příkladu z minulé přednášky jsme hledali extrém fce

$$V = x \cdot y \cdot z$$

za podmínky

$$2xz + 2yz + xy = 12$$

vyjádřením z z vazební podmínky jsme úlohu převedli na hledání volných extrémů fce dvou prom.

Takto je možné postupovat i v případě více proměnných

$$\max/\min \; f(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_r)$$

$$g_1(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_r) = 0$$

$$\vdots$$

$$g_r(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_r) = 0$$

Můžeme-li proměnné y_j, $j = 1, \dots, r$ vyjádřit ve tvaru

$$y_j = h_j(x_1, \dots, x_s)$$

lze tuto úlohu převést na hledání volného extrému fce s proměnných.

Title: 12. 20-10:56 dop. (3 of 6)

Def 20 Fci tvaru

$$F(x_1,\dots,x_n,\lambda_1,\dots,\lambda_m) = f(x_1,\dots,x_n) +$$

$$+\lambda_1 g_1(x_1,\dots,x_n) + \lambda_2 g_2(x_1,\dots,x_n) + \dots + \lambda_m g_m(x_1,\dots,x_n)$$

nazýváme Lagrangeovou fcí a čísla $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ nazýváme Lagrangeovými multiplikátory, příslušnými k úloze na vázaný extrém.

Věta 17 (Lagrangeova věta o vázaných extrémech)

Nechť jsou fce $f(x), g_1(x), \dots, g_m(x)$ spojitě dif. na oblasti Ω, na které má matice J tvaru

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

hodnost $h = m$.

Nechť hodnoty $x_1^*, \dots, x_n^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*$ jsou řešením soustavy rovnic

$$L_{x_1} = f_{x_1} + \lambda_1 \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} + \dots + \lambda_m \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_1},$$
$$\vdots$$
$$L_{x_n} = f_{x_n} + \lambda_1 \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_n} + \dots + \lambda_m \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_n},$$
$$g_1(x_1, \dots, x_n) = 0,$$
$$\vdots$$
$$g_m(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

Má-li Lagrangeova fce L v bodě $[x_1^*, \dots, x_n^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*]$ lokální extrém, má také fce $f(x_1, \dots, x_n)$ v bodě $[x_1^*, \dots, x_n^*]$ lokální extrém vázaný podmínkami

$$g_1(x) = 0,\ g_2(x) = 0, \dots, g_m(x) = 0.$$

PF

$$V = x \cdot y \cdot z$$

$$2xz + 2yz + xy = 12$$

$$L(x, y, z, \lambda) = x \cdot y \cdot z - \lambda(2xz + 2yz + xy - 12)$$

$$yz = \lambda(2z + y)$$
$$x \cdot z = \lambda(2z + x)$$
$$x \cdot y = \lambda(2x + 2y)$$
$$2xz + 2yz + xy = 12$$