Def. 15

(1) Polynomem m-tého stupně dvou argumentů nazýváme každý konečný součet součinů tvaru

$$a_{ij}x^i y^j,$$

kde a_{ij} jsou reálná čísla a $i+j\leq m$, přičemž i, j jsou nezáporná čísla a alespoň pro jeden koeficient $a_{ij}\neq 0$ platí $i+j=m$.

(2) Jsou-li v daném polynomu všechny členy $a_{ij}x^i y^j$ stejného stupně hovoříme o homogenním polynomu popř. o formě stupně m.

Speciálně pro $m=1$ hovoříme o lineární formě a pro $m=2$ o kvadratické formě.

(3) Homogenní polynom druhého stupně o n proměnných nazýváme n-ární kvadratickou formou

Pozn. (1) Lineární forma dvou argumentů

$$\phi_1(x,y)=a_{10}x+a_{01}y$$

Kvadratická forma dvou argumentů

$$\phi_2(x,y)=a_{11}x^2+\underbrace{2a_{12}xy}_{a_{12}xy\,+\,a_{21}y\cdot x}+a_{22}y^2$$

Def. 16

Kvadratická forma se nazývá

(a) kladně (záporně) definitní, jestliže v bodech $X \neq 0$ nabývá pouze kladných (záporných) hodnot

(b) —//— —//— semidefinitní, —//— —//— —//— nezáporných (nekladných) —//—

(c) indefinitní, jestliže v bodech $X \neq 0$ nabývá jak kladných tak záporných hodnot.

$$\phi_2(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i\neq j} a_{ij}x_i x_j$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Základní hlavní minory

$D_1 = a_{11}$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

Hlavní minory řádu p

$$M_{pq} = \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & \cdots & a_{i_1 i_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_p i_1} & \cdots & a_{i_p i_p} \end{vmatrix} \qquad D = \begin{vmatrix} \ddots & & & \\ & a_{i_1 i_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{i_p i_p} \\ & & & & \ddots \end{vmatrix}$$

$2^n - 1$

Věta (Sylvesterova)

Nechť $D_1, D_2, \dots, D_n = D$ jsou základní hlavní minory a M_{pq} jsou hlavní minory (v celkovém počtu $2^n - 1$) diskriminantu kvadratické formy $\phi(x_1, \dots, x_n)$. Pak je tato forma

(a) kladně definitní právě když jsou všechny její základní hlavní minory kladné

(b) kladně semidefinitní právě když jsou všechny její hlavní minory nezáporné

(c) záporně definitní (semidefinitní) právě když je forma $-\phi(x_1, \dots, x_n)$ kladně definitní (semidefinitní)

(d) indefinitní v ostatních případech

Def. 17

Říkáme, že fce $f(x_1, \ldots, x_n)$ má na oblasti Ω lokální maximum popř. minimum v bodě $x^* \in \Omega$, jestliže existuje prstencové okolí $P(x^*) \subseteq \Omega$ takové, že pro $\forall x \in P(x^*)$ platí

$$f(x) \leq f(x^*) \quad \text{popř.} \quad f(x) \geq f(x^*).$$

Jestliže jsou uvedené nerovnosti splněny ostře hovoříme o ostrém lokálním maximu popř. minimu.

Jestliže jsou uvedené nerovnosti splněny pro $\forall x \in \Omega - \{x^*\}$ hovoříme o absolutním (globálním) maximu či minimu a analogicky také o jejich ostrých formách.

Souhrnně hovoříme o extrémních hodnotách fce $f(x_1, \ldots, x_n)$ s přívlastky ostrý, lokální apod.

Věta 15 (Fermatova)

Jestliže má fce $f(x_1, \dots, x_n)$ v bodě x^*, na jehož okolí je sp. dif, lokální extrém pak platí

$$f_{x_1}(x^*) = f_{x_2}(x^*) = \dots = f_{x_n}(x^*) = 0$$

neboli

$$df(x^*) = 0.$$

Důkaz: Uvažujme $\varphi(x_k) = f(x_1^*, \dots, x_k, \dots, x_n^*)$

Má-li f extrém v bodě x^* má také fce $\varphi(x_k)$ extrém v x_k^*.

Pak platí $\varphi'(x_k^*) = 0$

a tedy

$$f_{x_k}'(x^*) = 0 \qquad \square$$

Def. 18

Bod x^*, ve kterém existuje diferenciál fce $f(x_1, \dots, x_n)$ a platí $df(x^*) = 0$ se nazývá stacionárním bodem fce $f(x_1, \dots, x_n)$.