Def. 12

Nechť je fce $f(x,y)$ definovaná na oblasti Ω, ve které leží bod $[x^*,y^*]$ a nechť $u=(u_1,u_2)$ je libovolný vektor. Potom limitu tvaru

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x^*+hu_1, y^*+hu_2)-f(x^*,y^*)}{h}$$

nazýváme směrovou derivací fce $f(x,y)$ ve směru vektoru u v bodě $[x^*,y^*]$ a značíme ji symbolem $f_u(x^*,y^*)$.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x^* + \gamma h) - f(x^*)}{h}$$

Věta 10

Nechť je fce $f(x,y)$ sp. dif. na nějakém okolí bodu $[x^*,y^*]$. Potom platí

$$f_u(x^*,y^*) = f_x(x^*,y^*)\cdot u_1 + f_y(x^*,y^*)\cdot u_2 .$$

Důkaz: Vyjádřeme fci $g(h)$ dvěma způsoby:

$$g(h) = f(x^* + h\cdot u_1, y^* + h u_2)$$

$$g(h) = f(x,y)$$

kde $x = x^* + h u_1$

$y = y^* + h u_2$

$$g'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x^*+hu_1, y^*+hu_2) - f(x^*, y^*)}{h}$$

$$= \underline{f_u(x^*, y^*)}$$

$$g'(h) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{\underline{dh}} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{\underline{dh}} = f_x \cdot u_1 + f_y \cdot u_2$$

$$g'(0) = \underline{f_x(x^*, y^*) \cdot u_1 + f(x^*, y^*) \cdot u_2}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1^* + h \cdot u_1, x_2^* + h u_2, \ldots, x_n^* + h u_n) - f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)}{h} =$$

$$= f_u(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*).$$

Def. 13

Gradientem fce $f(x,y)$ v bodě $[x^*,y^*]$ nazýváme vektor, jehož souřadnice jsou parc. der. fce $f(x,y)$ v tomto bodě a značíme jej $\nabla f(x^*,y^*)$, tj.

$$\nabla f(x^*,y^*) = \left(f_x(x^*,y^*), f_y(x^*,y^*)\right).$$

Pozn.

$$f_u(x^*,y^*) = \nabla f(x^*,y^*) \cdot u$$

Věta 11

Předpokládejme, že fce $f(x,y)$ má v daném bodě derivaci ve směru libovolného vektoru u. Pak je hodnota směrové derivace, ve směru vektorů o stejné délce, maximální pro vektor, který má stejný směr jako gradient.

Důkaz:

$$f_u(x^*,y^*) = \boxed{\nabla f(x^*,y^*)\cdot u} =$$

$$= \|\nabla f(x^*,y^*)\|\cdot\|u\|\cdot \underline{\cos\varphi}$$

Def. 14

Je-li rovnicí $F(x,y)=0$ určena na nějakém intervalu I fce $y=f(x)$ tak, že platí

$$F(x,f(x))=0 \quad \text{pro } \forall x\in I,$$

nazývá se fce $f(x)$ implicitní fce daná rovnicí $F(x,y)=0$.

Př $x^2+y^2-1=0$

$$y_1=\sqrt{1-x^2}$$

$$y_2=-\sqrt{1-x^2}$$

Př $3x-2y+5=0$

Př $\sqrt{x^2\cdot y^2}-xy=0$

Věta 12 (o existenci derivace implicitní fce)

Nechť má fce $F(x,y)$ násl. tři vlastnosti

(1) je sp. dif. na okolí bodu $[x^*, y^*]$

(2) platí $F(x^*, y^*) = 0$

(3) platí $F_y(x^*, y^*) \neq 0$.

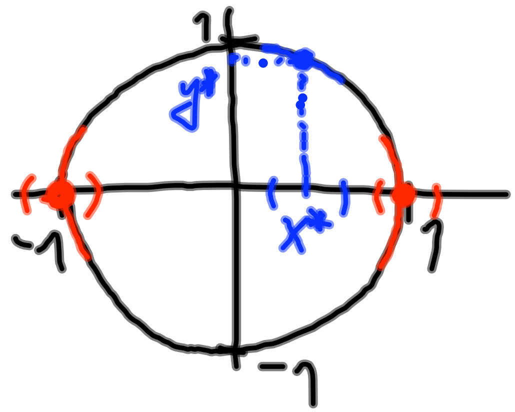
Potom je rcí $F(x,y) = 0$ na nějakém okolí $O(x^*)$ bodu x^* určena právě jedna implicitní fce $\underbrace{\text{taková}}_{y = f(x)}$, že

(1) její graf prochází bodem $[x^*, y^*]$

(2) je na $O(x^*)$ spojitá

(3) má v bodě x^* derivaci a platí $f'(x^*) = -\dfrac{F_x(x^*, y^*)}{F_y(x^*, y^*)}$

$x^2+y^2=1$



$F(x,y)=x^2+y^2-1$

$F_y(x,y)=2y$

$y\neq 0$

PF Určete derivaci implicitní fce dané rovnicí

$$3x^3 \cdot y^2 + x \cdot \cos y = 0$$

$y(x)^2$ $\qquad$ $y(x)$

$$9x^2 \cdot y^2 + 6x^3 y \cdot y' + \cos y - x \cdot \sin y \cdot y' = 0$$

$$y' = -\frac{9x^2y^2 + \cos y}{6x^3 y - x \cdot \sin y}$$

$$F_y \neq 0$$

$$y' = -\frac{F_x}{F_y}$$