Nechť je fce $f(x,y)$ dvakrát spojitě diferenciabilní na okolí bodu $[x^*,y^*]$. Potom úplným diferenciálem 2. řádu fce f v bodě $[x^*,y^*]$ nazýváme výraz

$$d^2f(x^*,y^*) = f_{xx}(x^*,y^*)\cdot h_1^2 + 2f_{xy}(x^*,y^*)\,h_1h_2 + f_{yy}(x^*,y^*)\,h_2^2$$

$$d(df) = d(f_x\cdot h_1 + f_y h_2) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(f_x h_1 + f_y h_2)\,h_1 + \frac{\partial}{\partial y}(f_x h_1 + f_y h_2)\cdot h_2$$

$$= f_{xx}h_1^2 + f_{yx}h_1h_2 + f_{xy}h_1h_2 + f_{yy}h_2^2$$

$f(x,y)$ je k-krát sp. dif.

$$d^k f = d\left(d^{k-1} f\right)$$

$$d^k f = \left(h_1 \frac{\partial \cancel{f}}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x^*, y^*)$$

! Symbolické vyjádření

Př $f(x,y) = x^3 + y^3 + \sin^2 x$ v bodě $[x^*, y^*] = [0, 2]$

$f_x = 3x^2 + \sin 2x$

$f_y = 3y^2$

$f_{xx} = 6x + 2 \cdot \cos 2x$

$f_{yy} = 6y$

$f_{xy} = 0$

$f_{xxx} = 6 - 4\sin 2x$

$f_{yyy} = 6$

$$d^3f = \left(h_1\frac{\partial}{\partial x} + h_2\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(x,y) =$$

$$= \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^3}\cdot h_1^3 + \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^2 \partial y} 3h_1^2 \cdot h_2 + \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x \partial y^2} 3h_1h_2^2 +$$

$$+ \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y^3} h_2^3 =$$

$$= h_1^3(6 - 4\sin 2x) + 6h_2^3$$

$$d^3f(0,2) = 6h_1^3 + 6h_2^3$$

Def. 11 Nechť jsou fce $u = g(x,y)$ a $v = k(x,y)$ def. na oblasti Ω, přičemž všechny příslušné body $[u,v]$ leží v oblasti Γ, na níž je definována fce $z = f(u,v)$.

Potom: je na oblasti Ω def. fce

$$z = F(x,y) = f(g(x,y), k(x,y)),$$

kterou nazýváme složenou fcí. Fce f, g, k nazýváme jejími složkami.

Př $z = e^{x+y} \cdot \sin(x-y)$

$u = x + y$
$v = x - y$
} vnitřní složky

$z = e^{u} \cdot \sin v$ – vnější složka

Věta 7 Nechť jsou fce $u=g(x,y)$, $v=k(x,y)$ sp. dif na oblasti Ω a fce $z=f(u,v)$ je sp. dif. na oblasti Γ. Pak je složená fce $z=F(x,y)$ sp. dif. na oblasti Ω a platí

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

Důkaz:

$$\Delta z = f(u+p_1, v+p_2) - f(u,v) =$$

$$= \left[f(u+p_1, v+p_2) - f(u, v+p_2)\right] + \left[f(u, v+p_2) - f(u,v)\right]$$

přírůstky p_1, p_2 prom u, v lze chápat jako fce prom x, y

$$p_1 = g(x+h, y) - g(x,y) \rightarrow 0$$
$$p_2 = k(x+h, y) - k(x,y) \rightarrow 0$$

$$\Delta z = p_1 \cdot f_u(c, v+p_2) + p_2 f_v(u, d), \quad \text{kde}$$

$c \in (u, u+p_1)$
$d \in (v, v+p_2)$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta z}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h,y)-g(x,y)}{h}\cdot\lim_{\substack{p_1\to 0\\ p_2\to 0}} f_u(c,v+p_2) +$$

$$+\lim_{h\to 0}\frac{k(x+h,y)-k(x,y)}{h}\cdot\lim_{\substack{p_1\to 0\\ p_2\to 0}} f_v(u,d) =$$

(ide-li $h\to 0$, potom $p_1\to 0$, $p_2\to 0$)

$$= g_x(x,y)\cdot f_u(u,v) + k_x(x,y)\cdot f_v(u,v)$$

$$= \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

Pozn. (1) Jsou-li fce u, v závislé na jedné prom.

má složená fce $z = F(x) = f(g(x), k(x))$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}$$

(2) Zatím pro u fcí jedné prom. jsme vyjadřovali

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}$$

PF Nechť $z = e^x \cdot \sin y$, kde $x = st^2$, $y = s^2 t$

? $\frac{\partial z}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial t}$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} =$$

$$= \left(e^x \cdot \sin y\right) \cdot \left(t^2\right) + \left(e^x \cdot \cos y\right)(2st) =$$

$$= t^2 e^{st^2} \cdot \sin(s^2 t) + 2st \cdot e^{st^2} \cos(s^2 t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 2st \cdot e^{st^2} \sin(s^2 t) + s^2 \cdot e^{st^2} \cdot \cos(s^2 t)$$

(PF) Jestliže $u = x^4 y + y^2 z^3$, kde $x = rse^t$
$y = rs^2 e^{-t}$
$z = r^2 \cdot s \cdot \sin t$

spočtěte hodnota $\frac{\partial u}{\partial s}$ v bodě $[2, 1, 0]$
$\overset{\parallel}{r}\ \ \overset{\parallel}{s}\ \ \overset{\parallel}{t}$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial s} =$$

$$= (4x^3 \cdot y)(re^t) + (x^4 + 2yz^3)\cdot(2rse^{-t}) + (3z^2y^2)(r^2 \cdot \sin t)$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots = 192$$

Věta 8 Nechť fce $u_k = g_k(x_1, \dots, x_n)$ jsou sp dif. na oblasti Ω, $k = 1, \dots, m$ a fce $z = f(u_1, \dots, u_k)$ je sp. dif. na oblasti Γ. Pak za analogických předp. jako v def. 11, je složená fce

$$z = F(x_1, \dots, x_n) = f(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, \dots, x_n))$$

sp. dif. na oblasti Ω a platí

$$\frac{\partial z}{\partial x_j} = \frac{\partial z}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial z}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial z}{\partial u_m} \cdot \frac{\partial u_m}{\partial x_j}$$

pro $j = 1, \dots, n$.