$z = f(x,y)$, spojitě dif. v bodě $[x_0, y_0]$

$$\left.\begin{array}{l} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \end{array}\right\}$$ směrnice tečen k řezům plochy $z=f(x,y)$ sestrojených v bodě $[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$

jsou to řezy rovinami $x = x_0$, $y = y_0$

tečná rovina – rovina určená zmíněnými tečnami

Chceme určit rci tečné roviny

$[x_0, y_0, f(x_0, y_0) = z_0]$

$$z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0)$$

$$(-a, -b, 1)$$

$$\vec{s}_1 = (1, 0, f_x(x_0, y_0)) \qquad \vec{s}_2 = (0, 1, f_y(x_0, y_0))$$

$$-a + f_x(x_0, y_0) = 0$$

$$-b + f_y(x_0, y_0) = 0$$

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

směrový vektor normály

$$\left(-f_x(x_0, y_0), -f_y(x_0, y_0), 1\right)$$

$$x = x_0 - f_x(x_0, y_0)\, t$$
$$y = y_0 - f_y(x_0, y_0)\, t$$
$$z = z_0 + t$$

$P_{ř}$ $x^2+y^2+z^2=r^2$ v bodě $[x_0, y_0, z_0]$

$$z=\sqrt{r^2-x^2-y^2}$$

$$z_x=\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}=-\frac{x}{z}$$ $z\neq 0$

$$z_y=\frac{-y}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}=-\frac{y}{z}$$

$$z - z_0 = -\frac{x_0}{z_0}(x - x_0) - \frac{y_0}{z_0}(y - y_0)$$

$$zz_0 + yy_0 + xx_0 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = r$$

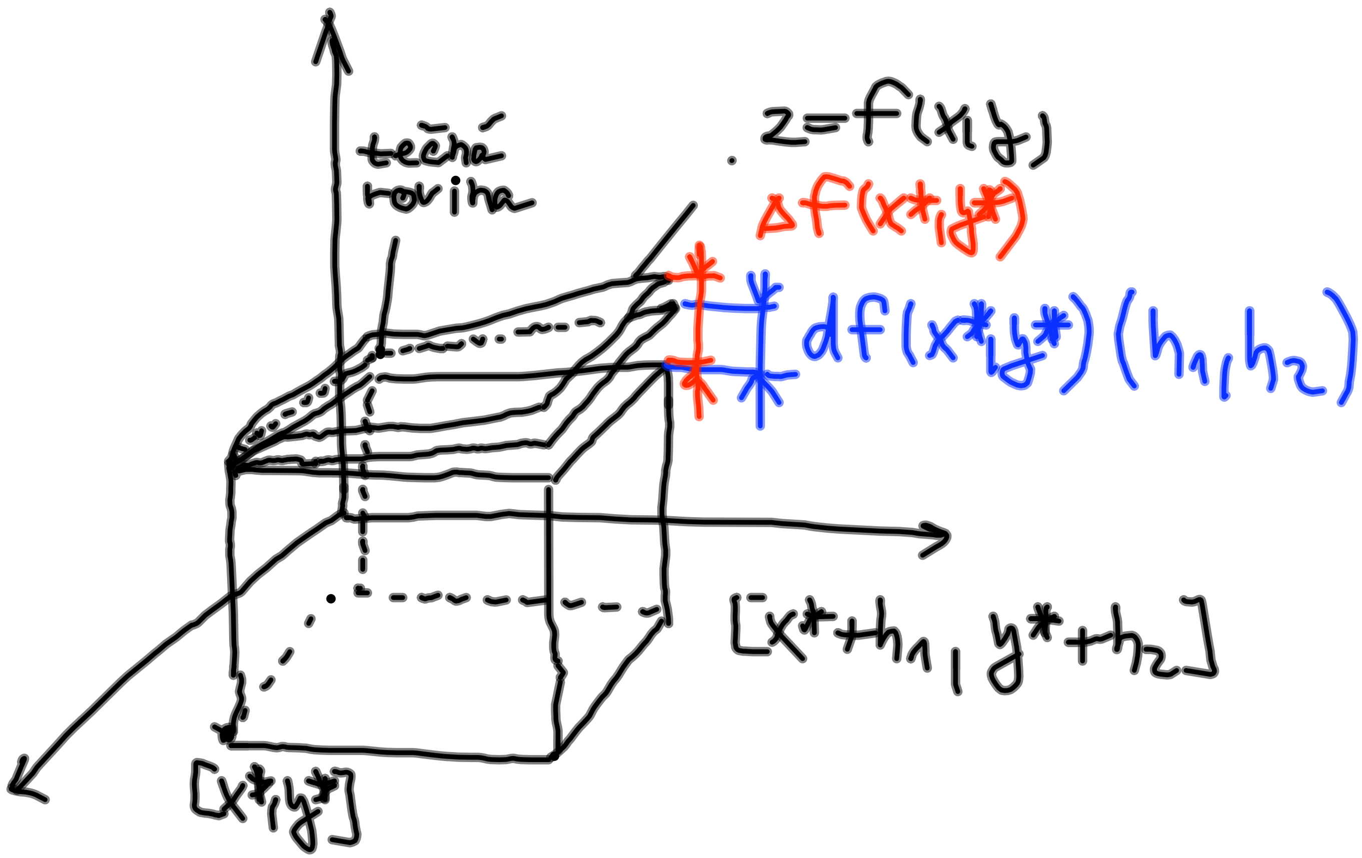
Def. 10

Nechť má fce $f(x,y)$ sp. parc. derivace na nějakém okolí bodu $[x^*, y^*]$. Diferenciálem fce $f(x,y)$ v bodě $[x^*, y^*]$ nazýváme lineární zobrazení tvaru

$$df(x^*,y^*) : (h_1, h_2) \longmapsto \underline{f_x(x^*,y^*) \cdot h_1 + f_y(x^*,y^*) h_2}$$

kde h_1, h_2 jsou lib. přírůstky prom. x, y takové, že bod $[x^* + h_1, y^* + h_2]$ leží v daném okolí.

Geometrický význam diferenciálu



$$df(x_1^*, \dots, x_n^*) : (h_1, \dots, h_n) \longmapsto f_{x_1}(x^*) \cdot h_1 + \dots + f_{x_n}(x^*)\, h_n$$

kae $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$.

Title: 10. 25-11:27 dop. (8 of 13)

Př $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x^2y + \sin x$

v bodě $[0,1]$, je-li $h_1 = 0{,}1$; $h_2 = -0{,}2$

$f_x = 3x^2 - 6xy + \cos x$

$f_y = 3y^2 - 3x^2$

$f_x(0,1) = 1$

$f_y(0,1) = 3$

$df(0,1) = h_1 + 3h_2$

$df(0,1)(0{,}1; -0{,}2) = -0{,}5$

$$\Delta f(x^*,y^*) - df(x^*,y^*) =$$

$$= f(x^*+h_1, y^*+h_2) - f(x^*,y^*) - \left[f_x(x^*,y^*)\cdot h_1 + f_y(x^*,y^*)\cdot h_2 \right] =$$

$$= \psi(h_1,h_2)$$

$$\frac{\psi(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \longrightarrow \; ? \qquad \text{jestliže } h_1 \to 0,\ h_2 \to 0$$

$$\Delta f(x^*,y^*) = f(x^*+h_1, y^*+h_2) - f(x^*, y^*+h_2) + f(x^*, y^*+h_2) - f(x^*,y^*)$$

$$= h_1 f_x(c, y^*+h_2) + h_2 f_y(x^*, d)$$

$$c \in (x^*, x^*+h_1), \quad d \in (y^*, y^*+h_2)$$

$$\psi(h_1,h_2) = \underbrace{h_1\left[f_x(c,y^*+h_2) - f_x(x^*,y^*)\right]}_{} \overbrace{}^{0} +$$

$$+\, h_2\left[f_y(x^*,a) - f_y(x^*,y^*)\right]$$

$$\lim_{\substack{h_1\to 0\\ h_2\to 0}} f_x(c,y^*+h_2) = f_x(x^*,y^*)$$

$h_1 \to 0$ pak $c \to x^*$

$$\lim_{\substack{h_1\to 0\\ h_2\to 0}} f_y(x^*,a) = f_y(x^*,y^*)$$

Celkem $\psi(h_1,h_2) \longrightarrow 0$, když $h_1 \to 0$, $h_2 \to 0$

$$\frac{|h_1|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \leq 1 \quad , \quad \frac{|h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \leq 1$$

$$\lim_{\substack{h_1\to 0\\ h_2\to 0}} \frac{\varphi(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{\substack{h_1\to 0\\ h_2\to 0}} \underbrace{\frac{h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}}_{\text{ohranič.}} \cdot \underbrace{\left[f_x(c,y^*+h_2)-f_x(x^*,y^*)\right]}_{\downarrow\, 0} +$$

$$\lim_{\substack{h_1\to 0\\ h_2\to 0}} \underbrace{\frac{h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}}_{\text{ohraničē}} \underbrace{\left[f_y(x^*,d)-f_y(x^*,y^*)\right]}_{\downarrow\, 0}$$

$$= 0$$

Věta 6 (princip superpozice (skládání) malých změn)

Celková změna $\Delta f(x)$ fce f n prom. $x_1, \dots, x_n$ způsobená malými změnami h_i jednotlivých prom. x_i, je rovna součtu parciálních změn $f_{x_i} h_i$ způsobených každou proměnnou zvlášť

tj.
$$\Delta f(x) \approx df(x) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i} h_i$$