INTERVALOVÉ ODHADY PARAMETRŮ

- bodové odhady

$$\mu \sim \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_i}_{\bar{X}} \sim \frac{1}{n}\sum x_i$$

$$|\bar{X} - \mu| = ?$$

$\bar{X}$ – dvourozměrná tabulka

Úvodní poznatky:

(i) X, Y na $(\Omega, \mathcal{S}, P)$

X, Y jsou nezávislé $\Leftrightarrow$

pro každé dva intervaly

$I_1, I_2 \in R$

$$P((X \in I_1) \wedge (Y \in I_2)) = P(X \in I_1) \cdot P(Y \in I_2)$$

(ii) X, Y – normálně rozdělené n.p.

$\Rightarrow X+Y$ je – " – " —

a platí: $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y)$$

(iii) $X_1, X_2, \dots, X_n$ je náhodný výběr z $N(\mu, \sigma^2)$. Pak je

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Prvé : $\frac{\sigma^2}{n} = ?$

$$P\left(\frac{1}{n}\sum X_i < x\right) = P\left(\sum X_i < nx\right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{nx} \frac{1}{\sigma\sqrt{n}\cdot\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-n\mu)^2}{2n\cdot\sigma^2}} dt$$

$D(\sum X_i) = n\cdot\sigma^2$

$\cdot n t = u$

$$= \frac{1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2}} du$$

Důsledek: $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\cdot\sqrt{n} \sim N(0,1)$

$|\overline{X}-\mu| \overset{?}{}$

Z Čebyševovy nerovnosti

$$P(|\overline{X}-\mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

resp. $$P(|\overline{X}-\mu| < \varepsilon) \geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2} = 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

<u>Problém</u>. Pro dané $\alpha \in (0,1)$ hledáme číslo $\Delta > 0$ tak, aby

$$P(|\bar{X} - \mu| < \Delta) = 1 - \alpha$$

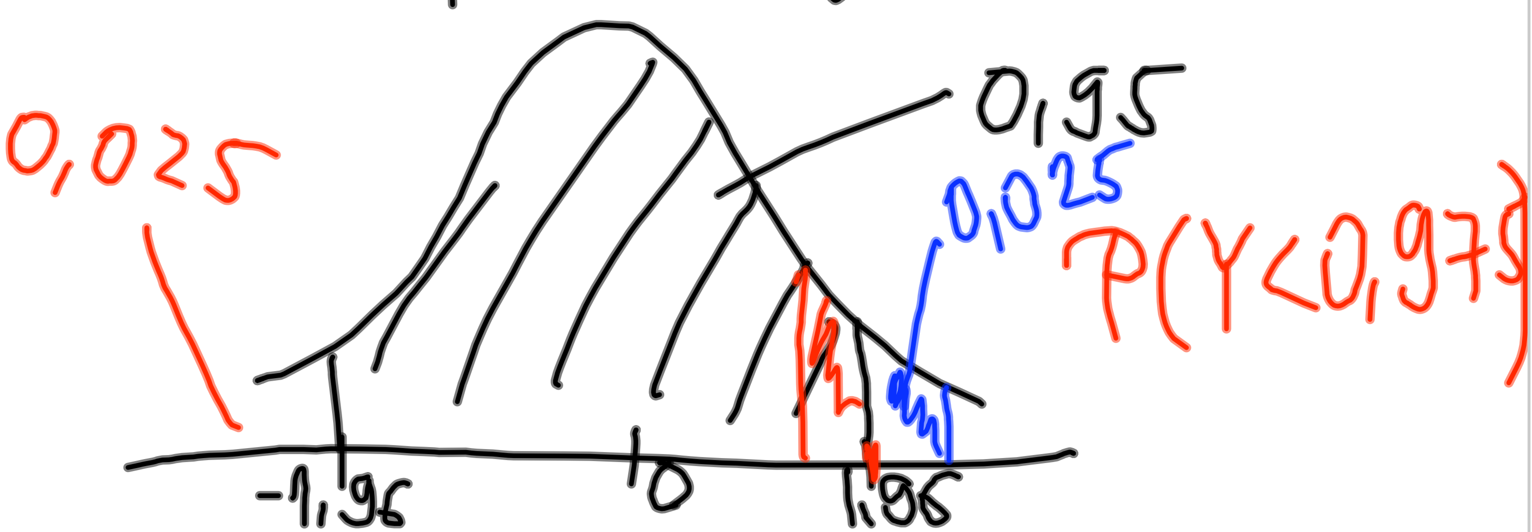
Interval $(\bar{X} - \Delta, \bar{X} + \Delta)$ se nazývá $(1-\alpha) \cdot 100\%$-ní <u>interval spolehlivosti</u> (<u>konfidenční interval</u>) střední hodnoty.

Víme, že $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

$$Y = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} \sim N(0,1)$$

nechť $\alpha = 0{,}05$

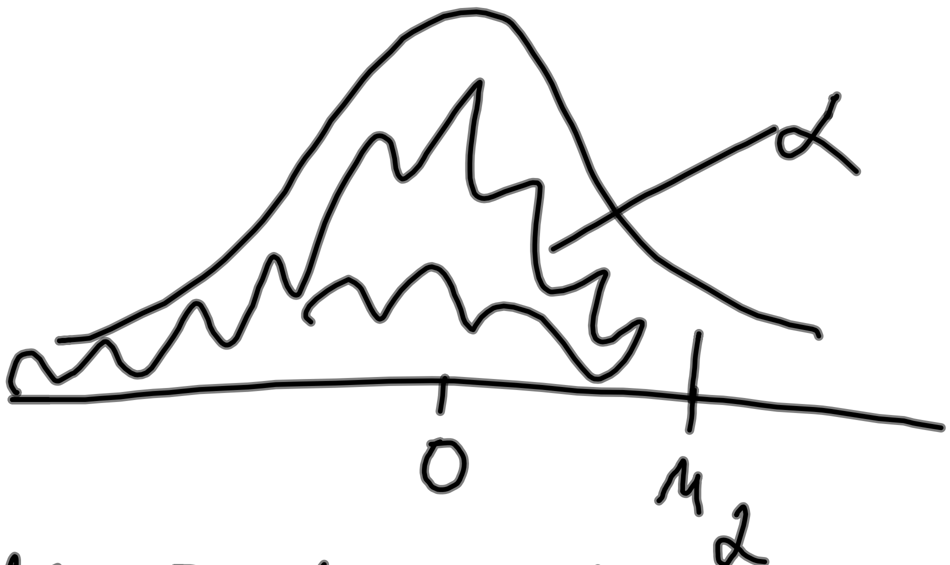
$$\Rightarrow P(|Y| < 1{,}96) = 0{,}95$$



Zde: $P\left(\frac{|\bar{X}-\mu|}{\sigma}\sqrt{n} < 1{,}96\right) = 0{,}95$

$$P\left(|\bar{X}-\mu| < \frac{\sigma \cdot 1{,}96}{\sqrt{n}}\right) = 0{,}95$$

Obecně: α-kvantil rozdělení $N(0,1)$ je číslo u_α, pro něž $\Phi(u_\alpha) = \alpha$, resp. $\int_{-\infty}^{u_\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \alpha$



Např. 1,96 je 0,975-kvantil

Obecný konfidenční interval pro μ

je $P\left(|\bar{X}-\mu| < \frac{\sigma \cdot u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$

Háček: σ ?

<u>Příklad</u>. $\sigma = 750$ Kč

maximální chyba je 50 Kč $= \Delta$

$\alpha = 0{,}05$

$$u_{0{,}975} = 1{,}96$$

$$|\bar{X} - \mu| < 50 < \frac{1{,}96 \cdot \sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow$$

$$n > \frac{1{,}96^2 \cdot 750^2}{50^2} \doteq 864{,}4$$

Interval spolehlivosti pro rozptyl.

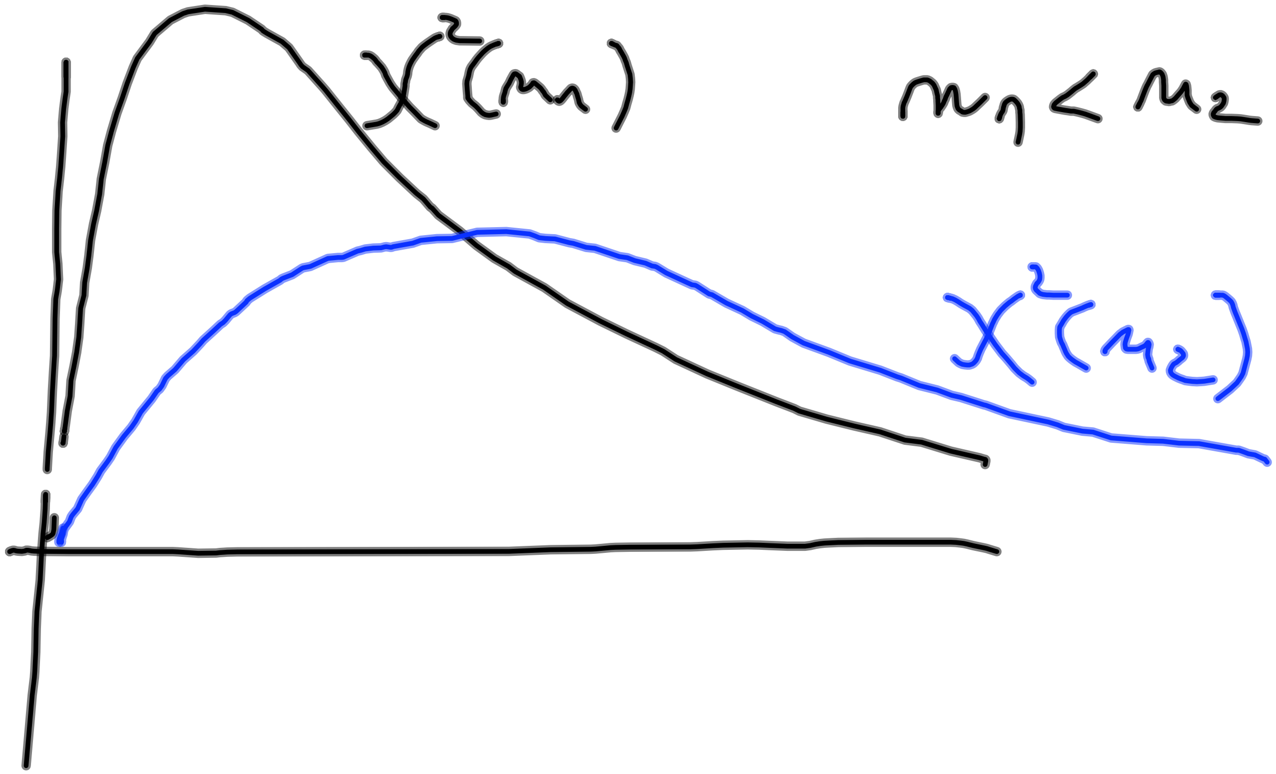
Víme, že

$$S^2(\mu) = \frac{1}{n}\sum (X_i - \mu)^2$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum (X_i - \overline{X})^2$$

jsou nevychýlené bodové odhady rozptylu σ^2.

Def. Náhodná veličina Y má rozdělení $\chi^2(n)$, dá-li se vyjádřit ve tvaru
$$Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2$$
kde $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ je náhodný výběr z $N(0,1)$.
Číslo n je počet stupňů volnosti.



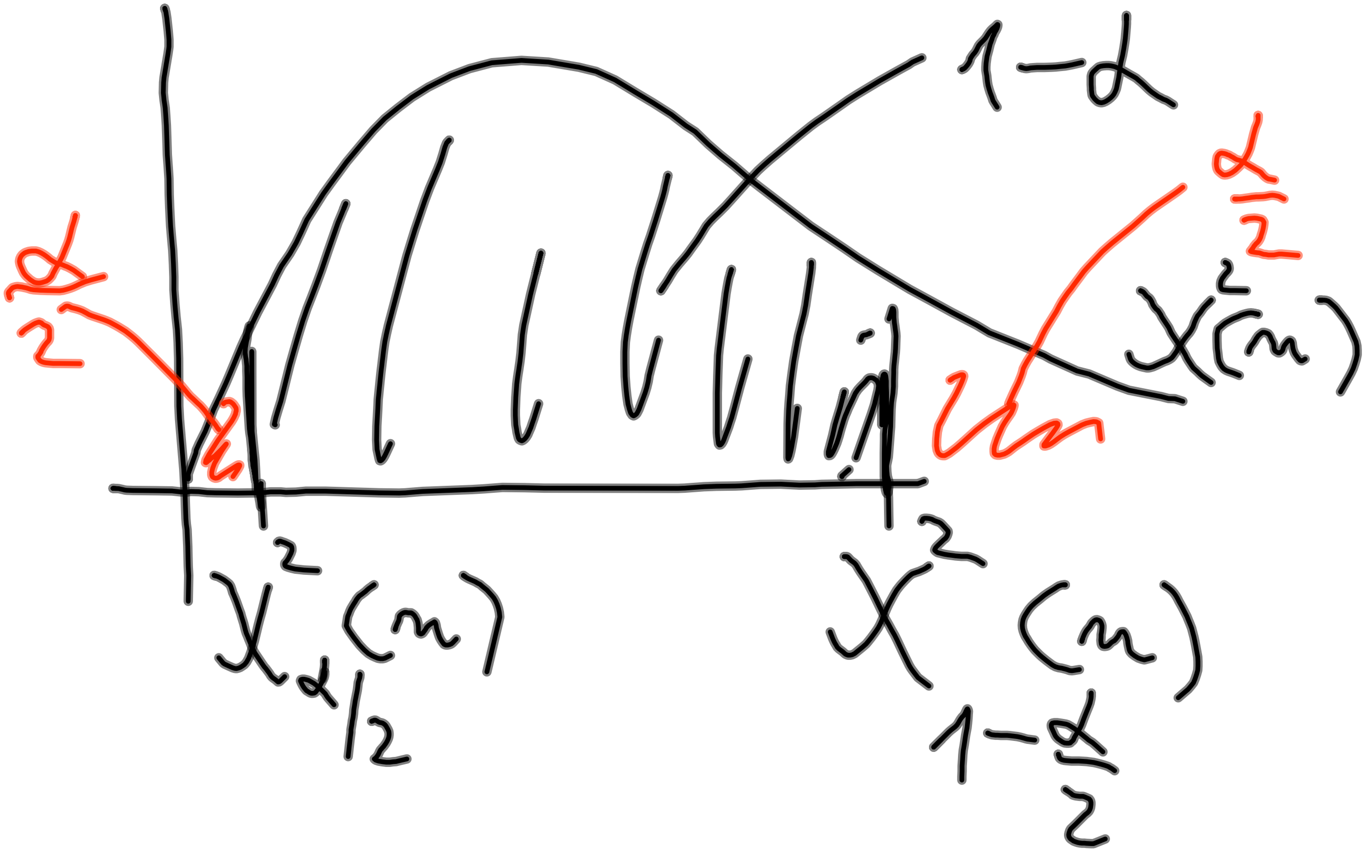
$\chi^2(n_1)$
$n_1 < n_2$
$\chi^2(n_2)$

<u>Veta</u>. Nech $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ je náhodný výber z $N(\mu, \sigma^2)$.

Potom je

$$\frac{n}{\sigma^2} \cdot S^2(\mu) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2(n)$$

$$\frac{n-1}{\sigma^2} \cdot S^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{X_i - \overline{X}}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2(n-1)$$


$1-\alpha$
$\frac{\alpha}{2}$
$\frac{\alpha}{2}$
$\chi^2(n)$
$\chi^2_{\alpha/2}(n)$
$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$

Odtud.

$$P\left(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \frac{n-1}{\sigma^2} S^2 < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) = 1-\alpha$$

$(1-\alpha)\cdot 100\%$-ní interval spolehlivosti pro σ^2 je

$$\boxed{P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right) = 1-\alpha}$$

Intervalový odhad střední hodnoty bez znalosti σ.

1908 W. S. GOSSET (pseudonym STUDENT)

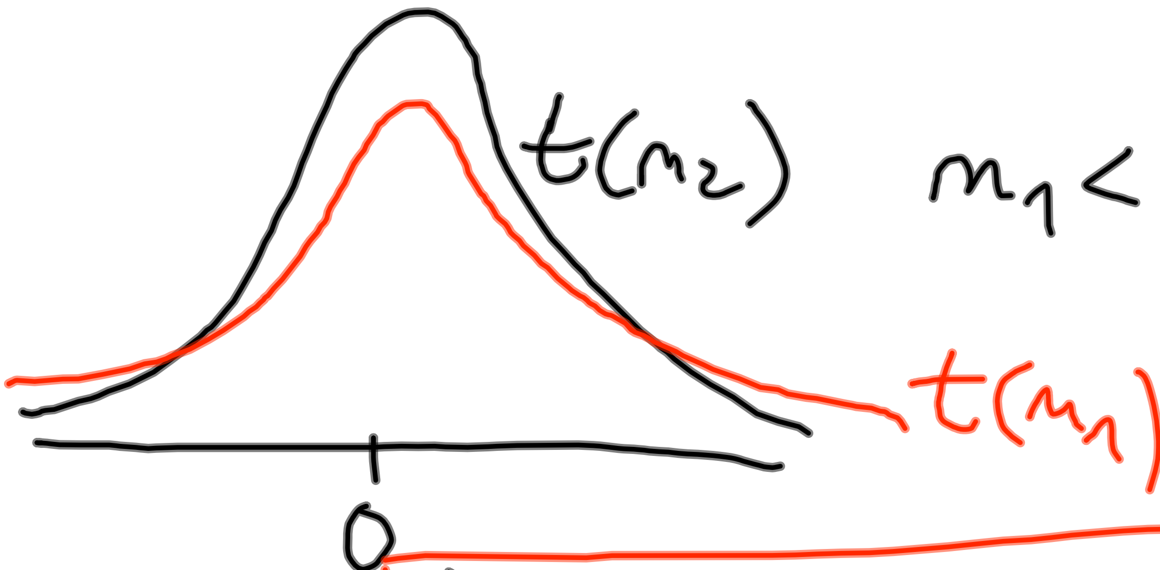
výsledek:

náhodná proměnná

$$Z = \frac{\bar{X}-\mu}{S}\sqrt{n}$$

má Studentovo rozdělení s $n-1$ stupni volnosti

Ozn. $t(n)$



$n_1 < n_2$

Obecně $\boxed{\frac{X}{\sqrt{Y}}\sqrt{n} \sim t(n)}$

$X \sim N(0,1),\ Y \sim \chi^2(n)$

takže:

$$P\left(\frac{|\bar{X}-\mu|}{S}\sqrt{n} < t_{1-\alpha/2}(n-1)\right) = 1-\alpha$$

Příklad (o průměrné mzdě)

$$S = 750\,\text{Kč} \quad \alpha = 0{,}05, \ \Delta = 50\,\text{Kč}$$

$$|\bar{X}-\mu| < \cancel{50} < \frac{S \cdot t_{1-\alpha/2}(n-1)}{\sqrt{n}} < 50$$

$$n > \ldots$$