Úloha o střední hodnotě

Vánoční besídka

přišlo n dětí

$1, 2, \dots, n$

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{pokud si } i\text{-té dítě odnáší svůj dárek} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Celkový počet dětí odnášejících si vlastní dárek je

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

$n!$ – počet uspořádání dárků v koši

$(n-1)!$ – — " — , kde na i-tém místě je dárek přinesený i-tým dítětem

$$P(X_i = 1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

$$E(X_i) = 1 \cdot \frac{1}{n} + 0 \cdot P(X_i = 0) = \frac{1}{n}$$

Takže: $E(S) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = 1$

Vlastnosti střední hodnoty

1. X, Y – náh. veličiny na $(\Omega, \mathcal{S}, P)$

$$\Rightarrow E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

2. $c \in R \Rightarrow E(cX) = c \cdot E(X)$

Důsledek:

$$\sigma \neq 0: \quad E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}\left(E(X) - E(\mu)\right) =$$

$$= \frac{1}{\sigma}(\mu - \mu) = 0$$

Vlastnosti rozptylu

1. $c \in \mathbb{R} \Rightarrow D(cX) = c^2 D(X)$

2. $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$

za předpokladu nezávislosti X, Y

Co znamená nezávislost X, Y definovaných na $(\Omega, \mathcal{S}, P)$?

I_1, I_2 jsou intervaly v $\mathbb{R}$

$$P((X \in I_1) \cap (Y \in I_2)) = P(X \in I_1) \cdot P(Y \in I_2)$$

Důsledek: $D\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2} D(X-\mu) =$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\left(D(X) - \underbrace{D(\mu)}_{=0}\right) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

APROXIMACE BINOMICKÉHO ROZDĚLENÍ NORMÁLNÍM

Příklad: $n = 12$, $p = \frac{1}{6}$

$$p_k = p(X = k) = \binom{12}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{12-k}$$

$$E(X) = n \cdot p = 2 \left(= \frac{12}{6}\right)$$

$$D(X) = n \cdot p(1-p) = 2 \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{3}$$

$$\sqrt{D(X)} \doteq 1{,}29$$

k	p_k
0	0,1121
1	0,2691
2	0,2961
3	0,1974
4	0,0888
5	0,0284
6	0,0066
7	0,0011
⋮	...

$\underbrace{0,\dots,6}_{8/9}$, $\underbrace{7,\dots}_{\le \frac{1}{9}}$

1,

$\sim \left(E(X) - 3\sqrt{D(X)},\ E(X) + 3\sqrt{D(X)}\right)$

leží hodnota X s pravd. $\geq \frac{8}{9}$ (Čebyšev)

konkrétně

$(-1{,}87;\ 5{,}87)$

	binom. rozd.	normální rozd.
střední hodnota	np	$= \mu$
disperse	$np(1-p)$	$= \sigma^2$

$$P_k \sim f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$P_k \sim f(k) \doteq \frac{1}{1{,}29\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(k-2)^2}{2\cdot 1{,}29^2}}$$

k	$f(k)$
0	0,0930
1	0,2299
2	0,3092
3	0,2299
4	0,0930
5	0,0209
6	0,0025
7	0,0001
⋮	

$$P(1 \leq X < 3) \overset{\text{hrozn.}}{=}$$
$$= P(X=1) + P(X=2)$$
$$= 0,2691 + 0,2961 =$$
$$= 0,5646$$

$$P(1 \leq X < 3) = \int_1^3 f(x)\,dx =$$

$$= F(3) - F(1) =$$

$$\doteq \phi\left(\frac{3-2}{1{,}29}\right) - \phi\left(\frac{1-2}{1{,}29}\right) =$$

$$= 2 \cdot \phi\left(\frac{1}{1{,}29}\right) - 1 = 2 \cdot 0{,}78230 - 1$$

$$= 0{,}56460$$

Aproximace...

$$\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0,1)$$

X - binomicky rozdělená náh. veličina

LAPLACEOVA–MOIVREOVA VĚTA

Nechť X_n je binomicky rozdělená náhodná proměnná, $n \in N$, $p \in (0,1)$. Pak pro všechna $x \in R$ je

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < x\right) = \phi(x)$$

$$\left(= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt\right)$$

Jinak řečeno: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\alpha \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < \beta\right) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$$

Prakticky: POZOR!

Pozn. $$\lim_{n\to\infty} P(\alpha \leq \ldots \leq \beta) = \lim_{n\to\infty} P(\alpha \leq \ldots < \beta)$$

Ještě jinak:

$$P(k_1 \leq X_n < k_2) \doteq \phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

Příklad - Pravděpodobnost, že výrobek je vadný, je 0,05. Jaká je pravd., že mezi 1000 výrobky je nejvýše 60 vadných?

Přesně: $\sum_{k=0}^{60} \binom{1000}{k} 0{,}05^k \cdot 0{,}95^{1000-k}$

$$P(0 \le X \le 60) \doteq \Phi\left(\frac{60 - 1000\cdot 0{,}05}{\sqrt{1000\cdot 0{,}05\cdot 0{,}95}}\right)$$

$$- \Phi\left(\frac{0-50}{47{,}5}\right) = 2\cdot\Phi(0{,}125)-1$$

$$\doteq 0{,}4009$$

Něco o důkazu Laplacea–Moivrea: Věta je důsledkem tzv. <u>centrální limitní věty</u>

Je-li $\{X_n\}_1^{\infty}$ posloupnost stejně rozdělených nezávislých náh. veličin na $(\Omega, \mathcal{S}, P)$, $E(X_n)=\mu$, $D(X_n)=\sigma^2$, $n=1,2,\dots$

Tvrzení:

Pro každé $x \in R$ je

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n \cdot \mu}{\sigma \cdot \sqrt{n}} < x\right) = \Phi(x)$$

Příklad na závěr.

Vypočítat přesně a přibližně pravd., že při 50 hodech mincí padne hlava aspoň 20-krát a nejvíce 30-krát.

Přesně: $$\sum_{k=20}^{30} \binom{50}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{50-k} = \dots$$

Přibližně: $P(20 \leq X \leq 30) \doteq$

$$\doteq \Phi\left(\frac{30-25}{\sqrt{25 \cdot 0{,}5}}\right) - \Phi\left(\frac{20-25}{\sqrt{12{,}5}}\right) =$$

$$= 2 \cdot \Phi\left(\frac{5}{\sqrt{12{,}5}}\right) - 1 \doteq \ldots$$