$$(\Omega, \mathcal{S}, P)$$

$$X : \Omega \to R$$

$$\forall x \in R \quad \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\} \in \mathcal{S}$$

$$F: R \to R$$

$$F(x) = P(X(\omega) < x)$$

$$x \in R$$

Spojitá náhodná veličina

Diskrétní: $x_1, \dots, x_n, \dots$

$p_1, \dots, p_n$

$$\sum p_i = 1$$

$f(x),\ x \in R$

rozdělení pravděp. spojité náh. prom.

$f(x) \geq 0$ a $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

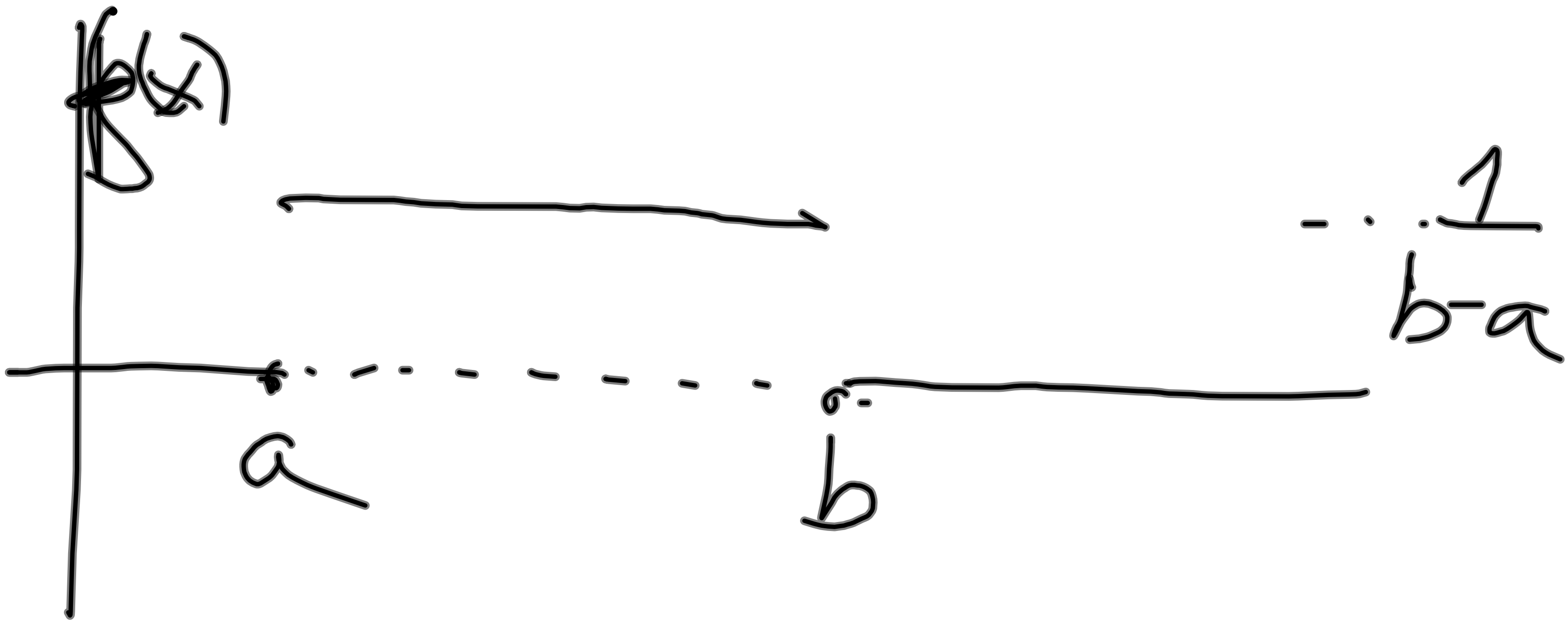
Distribuční funkce

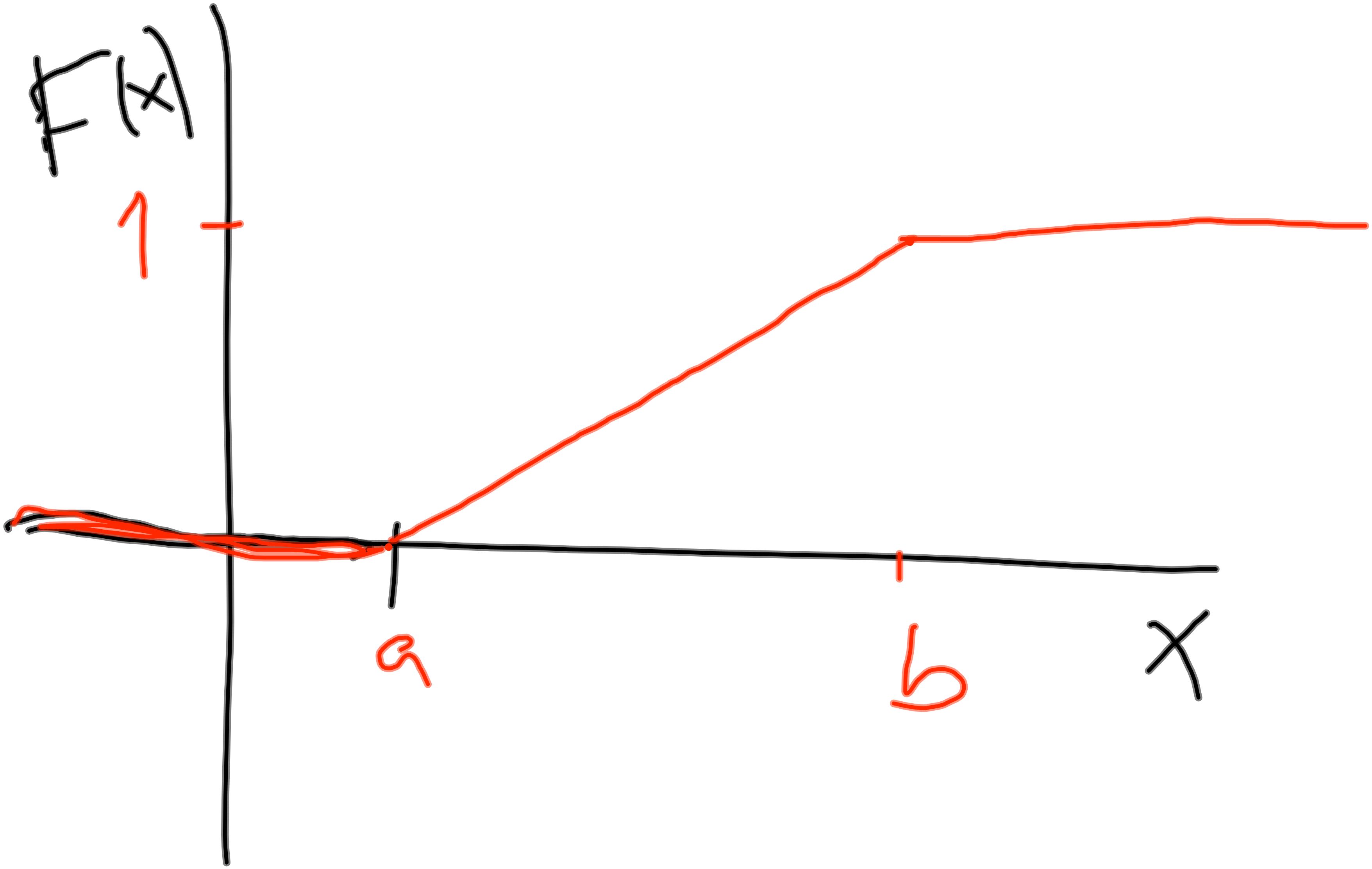
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

Předpokládá se, že integrál existuje

Příklady:

1. Rovnoměrné rozdělení



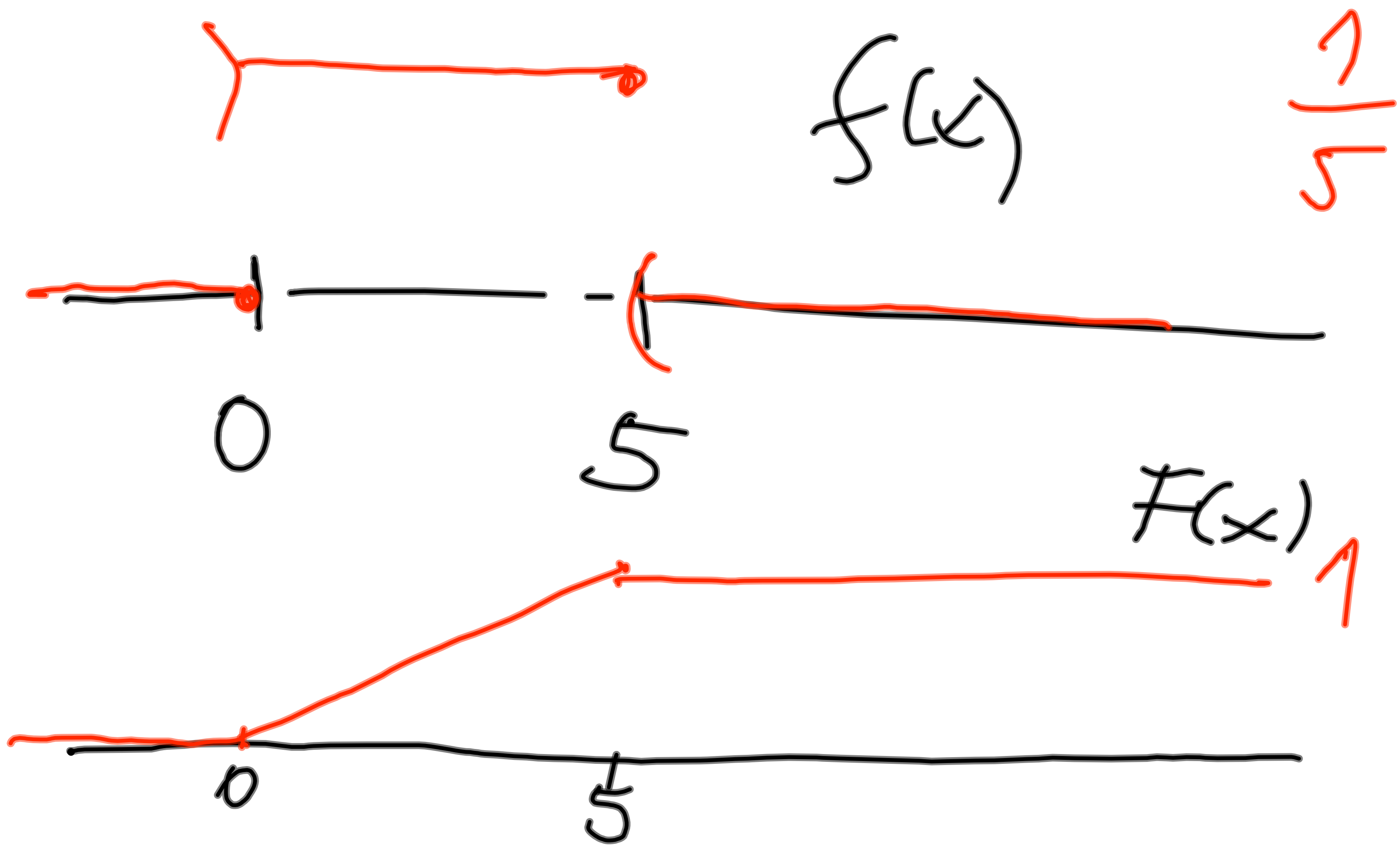


F(x)
1
a
b
x

Příklad: X – čekání

na tramvaj s intervaly

5 minut


f(x)
1/5
0
5
F(x)
1
0
5

2.) Exponenciální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}}, \quad x > 0$$

$$f(x) = 0, \quad x \leq 0$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt =$$

$$= 0, \quad x \leq 0$$

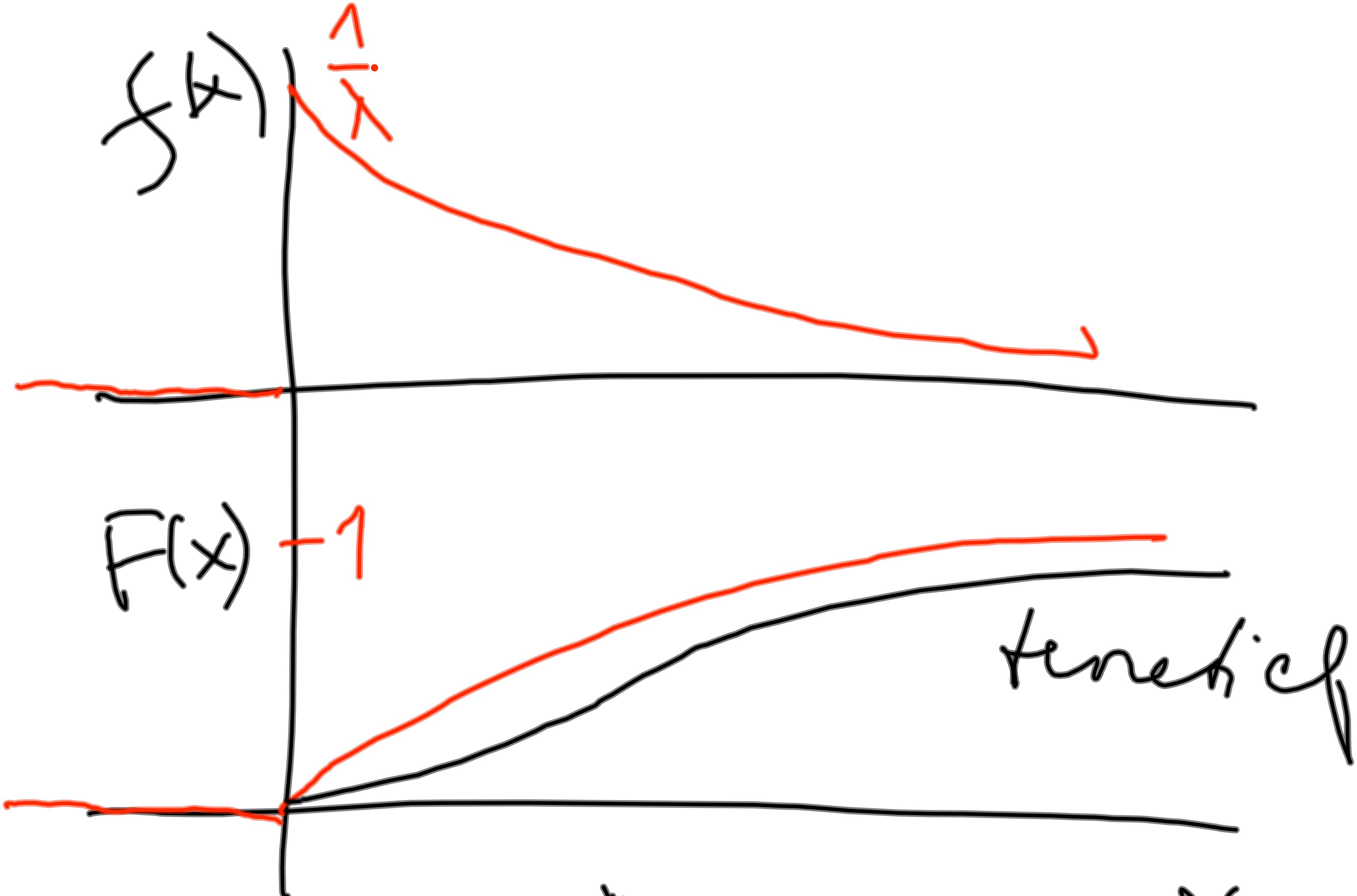
$x > 0$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt +$$

$$+ \int_{0}^{x} f(t)\,dt =$$

$$= \int_0^x \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{t}{\lambda}} dt =$$

$$= \left[\frac{1}{\lambda}(-\lambda) e^{-\frac{t}{\lambda}} \right]_0^x = 1 - e^{-\frac{x}{\lambda}}$$



$F''(x) < 0, \; x > 0$

Například:

X – doba živočišná

zárovek

X – střední doba

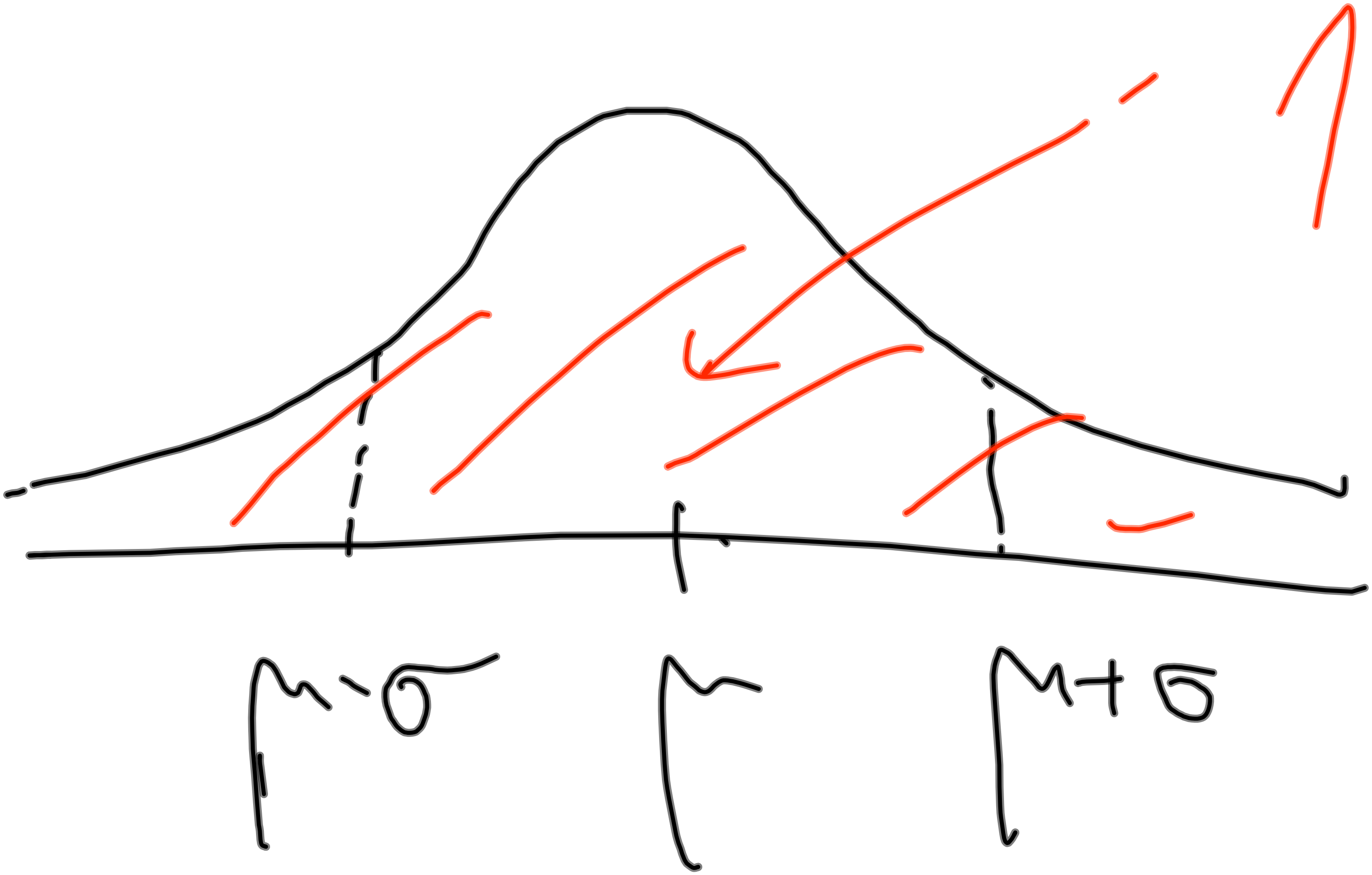
živočišná

3. Normální rozdělení pravděpodobnosti
(Gaussovo)

$$N(\mu, \sigma^2)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$\mu \in R, \sigma > 0, x \in R$



μ-σ
μ
μ+σ

Jsou tabelovány hodnoty funkce

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$\mu = 0,\ \sigma = 1$

a hodnoty distribuční funkce

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$$

$x \geq 0$

$$\phi(-x) = 1 - \phi(x)$$

$x > 0$

Například:

Výška člověka

STŘEDNÍ HODNOTA NÁHODNÉ PROMĚNNÉ

Def. 1. X – diskrétní n.p.

$x_1, \ldots, x_n, \ldots$

$p_1, \ldots, p_n, \ldots$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

Příklady:

1. hrací kostka – 1 hod

$$E(X) = \sum_{i=1}^{6} i \cdot \frac{1}{6} =$$

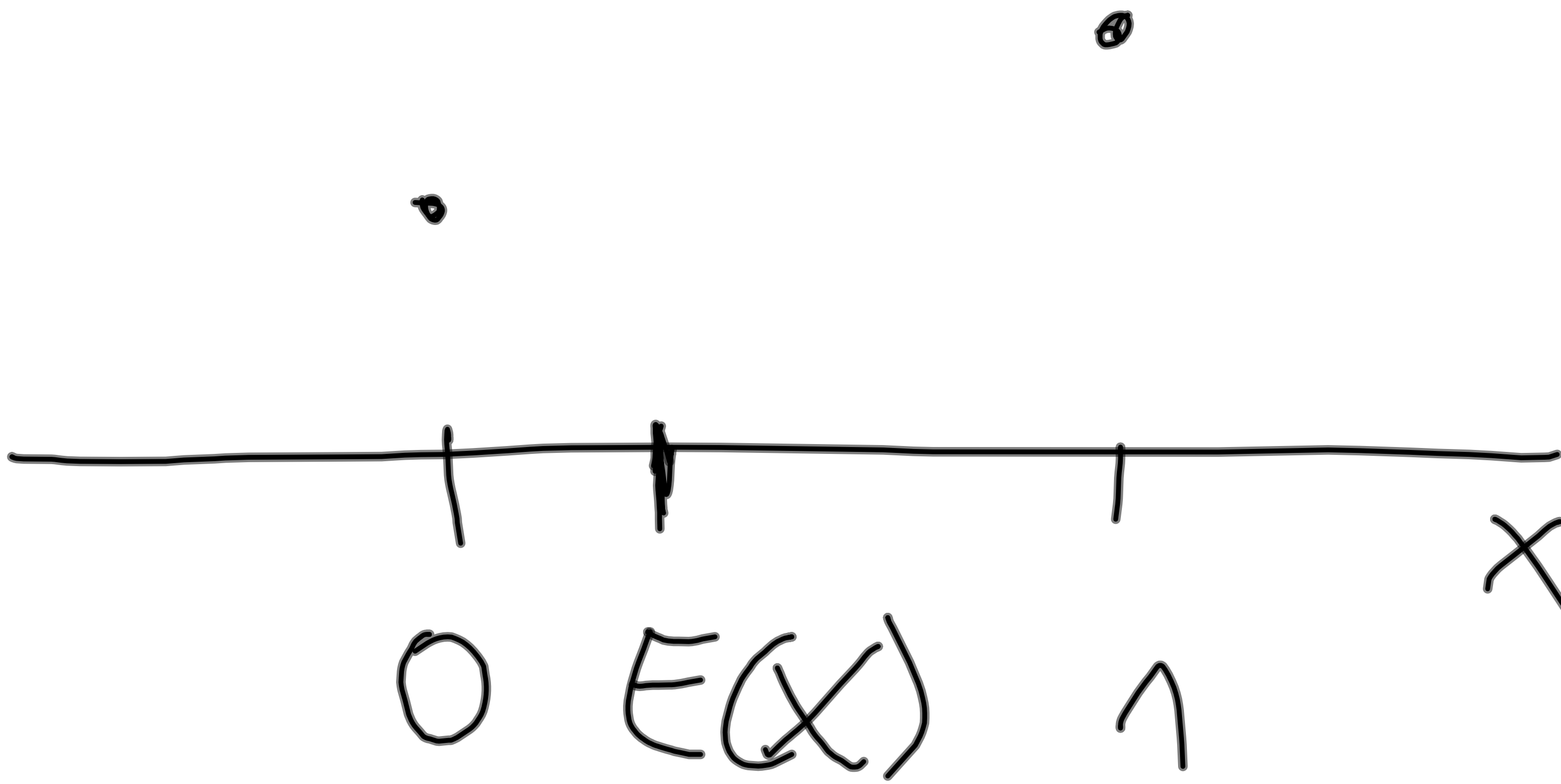
$$= \frac{1}{6}(1+2+\dots+6)$$

2.) Alternativní rozdělení

$x_1 = 1, \; x_2 = 0$

$p_1 = p, \; p_2 = 1 - p$

$E(X) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p$


0
E(X)
1
X

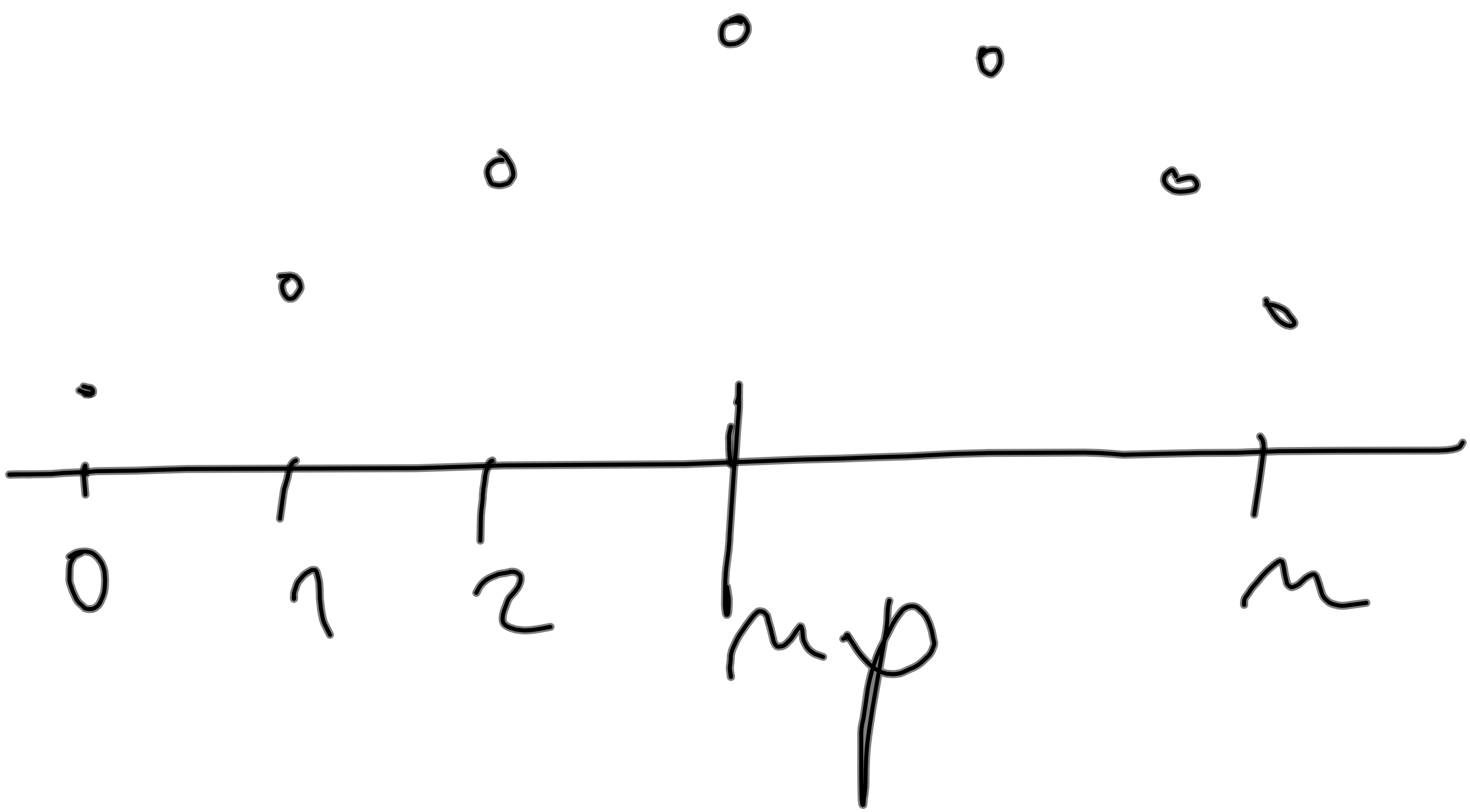
3.) Binomické rozdělení

$x_0, x_1, \dots, x_n$ | $p_i = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$

$\boxed{0, 1, \dots, n}$

$$E(X) = \sum_{i=0}^{n} i \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} =$$

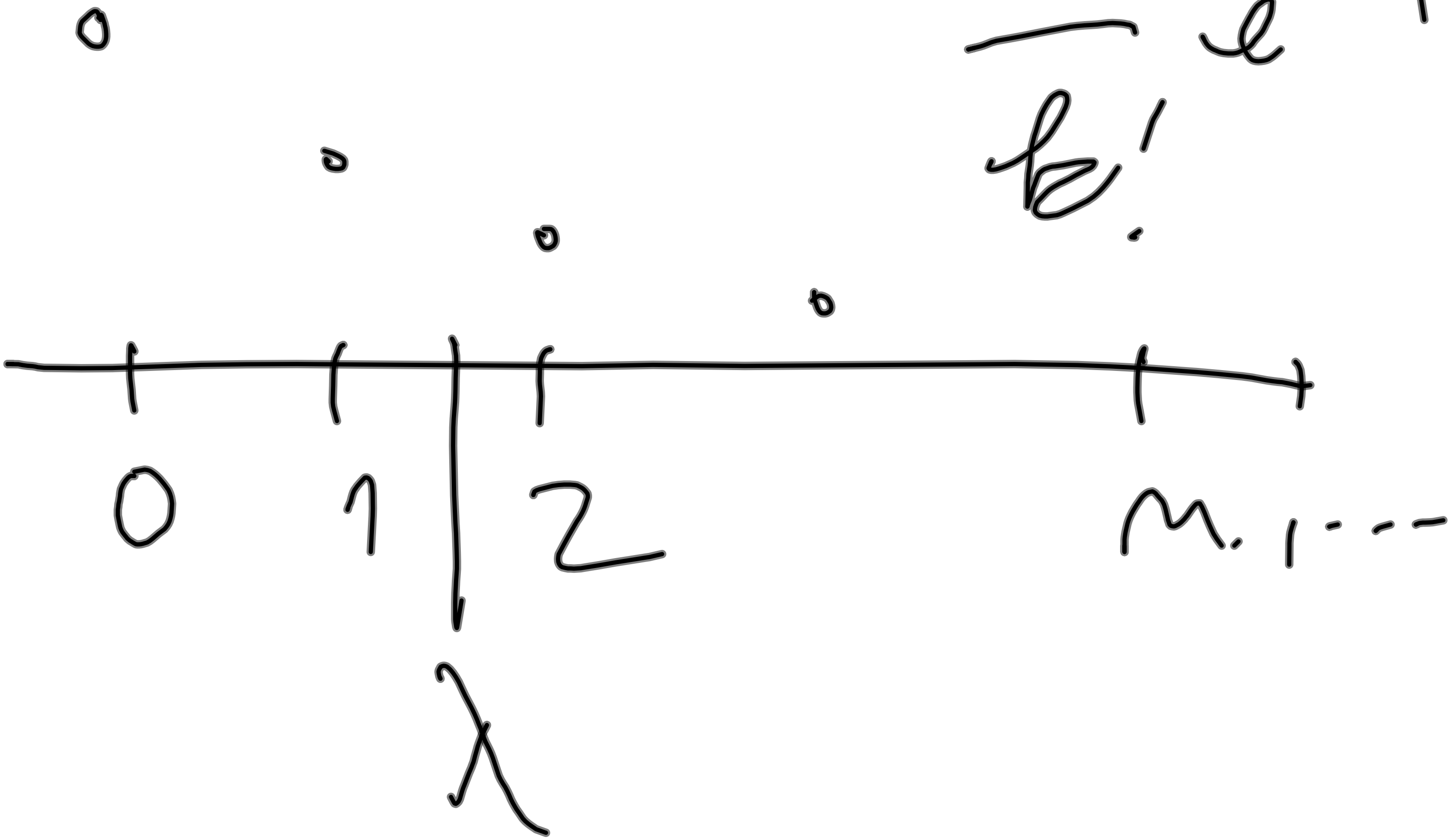
$$= n \cdot p$$


0
1
2
np
n

4.) Poisson

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = \dots = \lambda$$

$$\frac{\lambda^{k}}{k!}\, e^{-\lambda}$$



Například:

Příze se navíjí na 800 cívek. Za čas Δt je 0,005 pravd., že se někde přetrhne nit.

Je třeba mít

předem, že v Δt

se protrhne síť

na 4 článcích?

$$P(X=4)=$$

$$\binom{800}{4} 0{,}005^{4} (1-0{,}005)^{800-4}$$

$$\doteq 0{,}2$$

Poisson $\Rightarrow$

$$\lambda = n \cdot p = 800 \cdot 0{,}005 = 4$$

$$P(X=4) = e^{-4} \cdot \frac{4^4}{4!} \doteq 0{,}1954$$

Spojité rozdělení

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx$$

1.) Rovnoměrné rozdelení

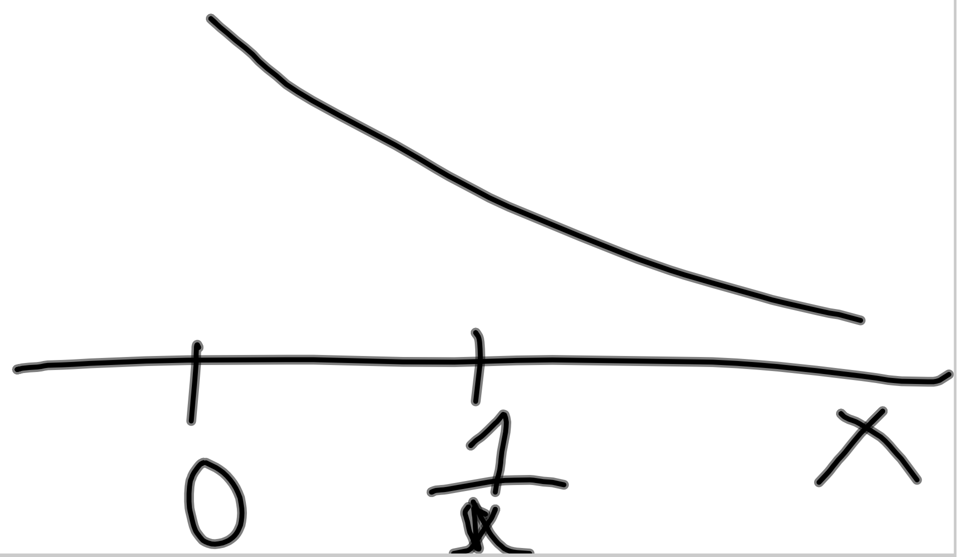
$$\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{b-a}\,dx, \quad x \in \langle a,b \rangle$$

$$= 0, \quad x \in R \setminus \langle a,b \rangle$$

Výsledek: $E(X) = \frac{a+b}{2}$

2.) Exponenciální rozdělení:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$



3.) Gauss

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\cdots} \, dx =$$

$$= \cdots = \mu$$

S przyzi'm
na talim

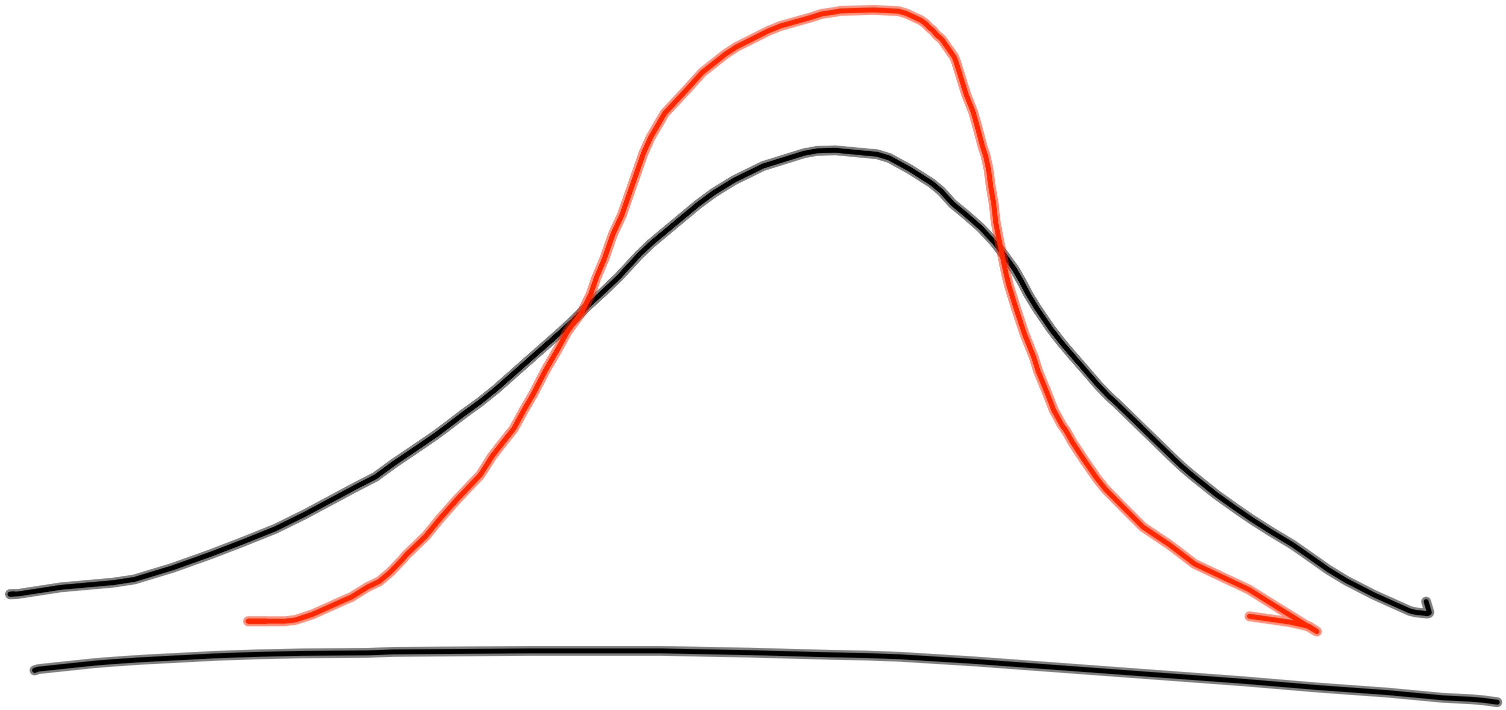
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

LAPLACE

DISPERZE

(ROZPTYL)

NÁHODNÉ PROM.



$$D(X) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \left(x_i - E(X)\right)^2$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 \cdot f(x)\, dx$$