Tvrzení: Buďte $f: \mathcal{U} \to V$, $g: V \to W$ homomorfismy. Pak je $g \circ f: \mathcal{U} \to W$ také hom.

Důkaz: 1. aditivita $g \circ f$

$$\forall u_1, u_2 \in \mathcal{U}: (g \circ f)(u_1 +_{\mathcal{U}} u_2) =$$

$$= g(f(u_1 +_{\mathcal{U}} u_2)) =$$

$$= g(\underbrace{f(u_1)}_{\in V} +_V \underbrace{f(u_2)}_{\in V})$$

$$= \underbrace{g(f(\underbrace{u_1}_{\in \mathcal{U}}))}_{\in W} +_W \underbrace{g(f(u_2))}_{\in W}$$

$$= (g \circ f)(u_1) +_W (g \circ f)(u_2)$$

$$\forall u \in \mathcal{U}, r \in P$$

$$(g \circ f)(r \cdot_{\mathcal{U}} u) = g(f(r \cdot_{\mathcal{U}} u))$$

$$= g(r \cdot_V \underbrace{f(\underbrace{u}_{\in \mathcal{U}})}_{\in V}) = r \cdot_W g(f(u)) =$$

$$= r \cdot_W (g \circ f)(u)$$

$\Rightarrow$ $g \circ f$ homomorfismus

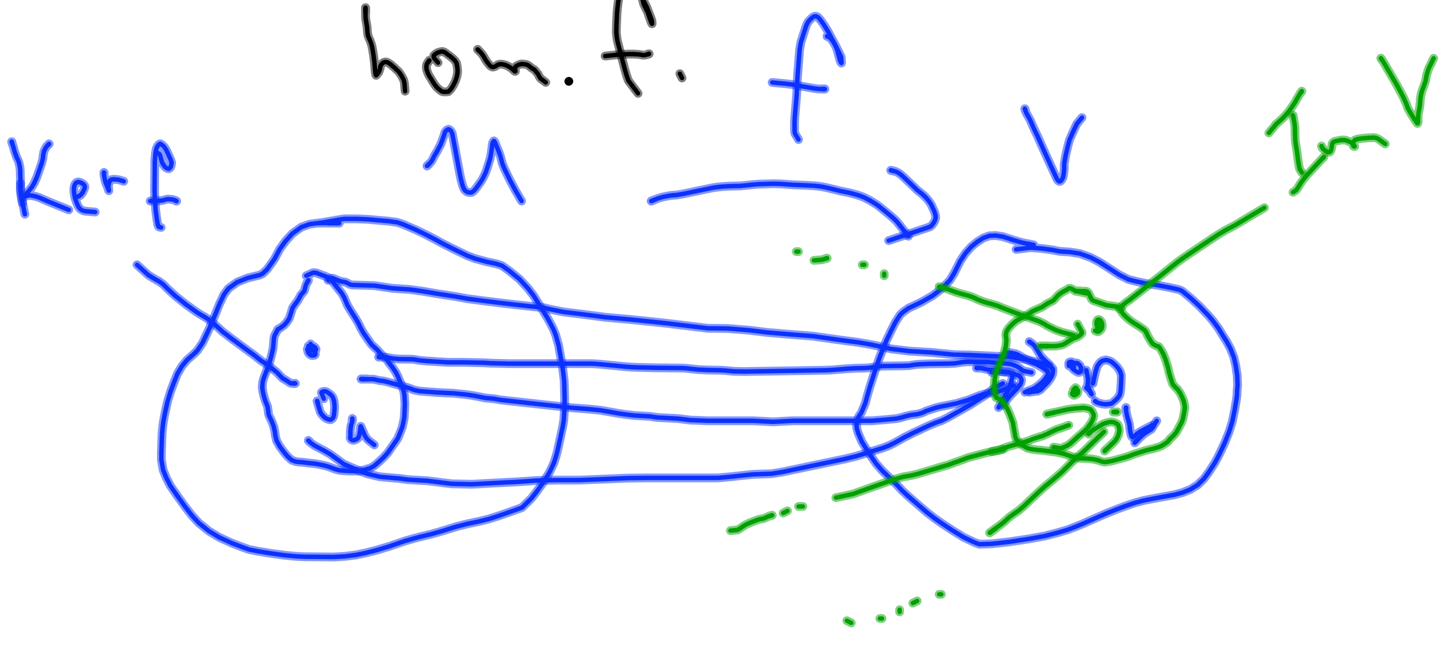
$\square$

Definice: Buď $f: U \to V$ hom. Ozn.

$$\mathrm{Ker}\, f = \{u \in U \mid f(u) = 0\},$$

$$\mathrm{Im}\, f = fU = \{f(u) \mid u \in U\}.$$

$\mathrm{Ker}\, f$ se nazývá **jádro**, $\mathrm{Im}\, f$ se nazývá **obraz** hom. f.



Příklad: 1. $Re z: \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ a+ib \mapsto a$

$$\operatorname{Ker} f = \{ i\cdot b \mid b \in \mathbb{R} \}$$

$$\operatorname{Im} f = \{ a \mid a \in \mathbb{R} \} \ (= \mathbb{R})$$

2. $id_V: V \to V,\ x \mapsto x$

$$\operatorname{Ker} f = \{ 0_V \}$$

$$\operatorname{Im} f = V$$

3. $z: V \to V,\ x \mapsto 0_V$

$$\operatorname{Ker} f = V$$

$$\operatorname{Im} f = \{ 0_V \}$$

Tvrzení: Buď $f: U \to V$ hom. Pak

(1) $\operatorname{Ker} f$ je podpr. v U.

(2) $\operatorname{Im} f$ je podpr. ve V.

Důkaz: $\operatorname{Ker} f \subset U$ (z def. $\operatorname{Ker} f$)

a) $0 \in \operatorname{Ker} f$

b) $\forall a, b \in \operatorname{Ker} f$

$f(a+b) = f(a) + f(b) = 0 + 0 = 0$

$\Rightarrow a+b \in \operatorname{Ker} f$

c) $\forall a \in \operatorname{Ker} f, \forall r \in P$

$f(r.a) = r.f(a) = r.0 = 0$

$\Rightarrow r.a \in \operatorname{Ker} f$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} f$ je vekt. podpr. v U.

pro $\operatorname{Im} f$ cvičení $\square$

Tvrzení: Buď $f: U \to V$ hom. $P_1 k$
(1) f je inj. právě tehdy, když $\mathrm{Ker} f = 0$,
(2) f je sur. právě tehdy, když $\mathrm{Im} f = V$.

Důkaz: (1) "$\Rightarrow$" předp.: f je injektivní

$\Rightarrow 0_V$ má právě jeden vzor

Pozn: $\forall a, b \in U, \forall r \in P$:

$$f(a+b) = f(a) + f(b)$$

$$f(r.a) = r.f(a)$$

$a = 0$: $f(\underbrace{r.0}_{=0}) = r.f(0)$

$$\underline{f(0)} = r.\underline{f(0)}$$

$a = b = 0$: $f(0+0) = f(0) \overset{\shortparallel}{+} f(0)$

$$f(0) = f(0) + f(0) \mid -f(0)$$

$$0 = f(0)$$

a tím je $0 \in U$. $\Rightarrow \mathrm{Ker} f = \{0_U\}$

"$\Leftarrow$" předp.: $\mathrm{Ker} f = \{0\}$

$\underline{\forall a, b \in U}$: $\underline{f(a) = f(b)} \Rightarrow$

$f(a) - f(b) = 0$

$\Rightarrow f(a-b) = 0$

$\Rightarrow a - b \in \mathrm{Ker} f$

$\Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow \underline{a = b}$

$\Rightarrow f$ je injektivní

(2) zřejmé

$\square$

Tvrzení: Buď $f: U \to V$ hom. mezi kon. rozm. v. pr. U, V. Pak

$$\underbrace{\dim \operatorname{Ker} f}_{m} + \underbrace{\dim \operatorname{Im} f}_{n-m} = \underbrace{\dim U}_{n}.$$

Důkaz - idea: $\operatorname{Ker} f$ .. báze: $\underline{u_1, \dots, u_m}$

doplním do báze v U vektory $\underbrace{\underline{u_{m+1}, \dots, u_n}}_{n-m}$

$\dim U = n$

$m \leq n$

musím ukázat, že

$f(u_{m+1}), \dots, f(u_n)$ je báze v $\operatorname{Im} f$. $\dim \operatorname{Ker} f = m$

je třeba ukázat, že gen. $\operatorname{Im} f$ a jsou LN. $\square$

Tvrzení: Buď $f: U \to V$ izomorfismus. Pak

$f^{-1}: V \to U$ je

také izomorfismus.

Důkaz: f je bijektivní $\Rightarrow f^{-1}\ \exists$ a je také bijektivní

Aditivita f^{-1}: $\quad \bar{a}, \bar{b} \in V$

$$\forall \bar{a}, \bar{b} \in V: f^{-1}(\bar{a}+\bar{b}) = f^{-1}(\underline{\bar{a}}) + f^{-1}(\underline{\bar{b}})$$

$$a+b = (f^{-1} \circ f)(a+b) = $$

$$= f^{-1}(f(a+b)) = \underline{f^{-1}(\overset{\bar{a}}{f(a)} + \overset{\bar{b}}{f(b)})}$$

$$= a+b = (f^{-1} \circ f)(a) + (f^{-1} \circ f)(b) =$$

$$= \underline{f^{-1}(\underbrace{f(a)}_{\bar{a} \in V}) + f^{-1}(\underbrace{f(b)}_{\bar{b}})}$$

$$\underbrace{f^{-1}(\bar{a}+\bar{b})}_{\in U} = f^{-1}(\bar{a}) + f^{-1}(\bar{b})$$

$\Rightarrow f^{-1}$ je aditivní

homogenita obdobně $\square$

Definice: Vekt. pr. U, V mezi nimiž ex. izomorfismus, nazýváme **izomorfní**. Zapisujeme $U \cong V$.

Tvrzení: $\cong$ je relace ekvivalence.

Důkaz: Reflexivita: $id_V: V \to V, x \mapsto x$

Symetrie: viz tvrzení výše

Tranzitivita: složení bijekcí je opět bijekce, hom. totéž

$\square$

Tvrzení: Buďte $\mathcal{U} \cong V$ dva izomorfní v. pr. Pak $\dim \mathcal{U} = \dim V$

Důkaz: $\underbrace{\dim \underbrace{\operatorname{Ker} f}_{=\{0\}}}_{=0} + \dim \underbrace{\operatorname{Im} f}_{=V} = \dim \mathcal{U}$

$\Rightarrow \dim V = \dim \mathcal{U}$

Tvrzení: 1. K.b. v.pr. U nad P je izomorfní s $P^{\dim U}$

2. Konroz. v.pr. U, V jsou izomorfní právě tehdy, když mají stejnou dimenzi.

Důkaz: 1. $U \cong P^{\dim U}$

báze U: $u_1, \dots, u_n$

$\forall u \in U$: $u = x_1 \cdot u_1 + \dots + x_n \cdot u_n$

$z: U \to P^{\dim U}$: $u \mapsto \underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_{\in P^{\underset{n}{\underset{\shortparallel}{\dim U}}}}$

2. $\dim U = \dim V$

$U \cong P^{\underset{n}{\underbrace{\dim U}}}$

$V \cong P^{\underset{n}{\underbrace{\dim V}}}$

$\Rightarrow U \cong V$

$\square$