Definice: Buď V vekt. pr. nad P. Buďte U_1, U_2 podpr. ve V. Součet $U_1 + U_2$ se nazývá <u>přímý</u>, jestliže každý vektor $v \in U_1 + U_2$ lze zapsat právě jedním způsobem jako součet $v = u_1 + u_2$, kde $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$. Zapisujeme $U_1 \dot{+} U_2$.

Příklad: $V = \mathbb{R}^2$

$U_1 = \mathbb{R}^2$, $U_2 = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$U_1 + U_2$ je přímý součet?

$(1,1) \in \mathbb{R}^2$

$$\underbrace{(1,1)}_{\in U_1 + U_2} = \underbrace{(0,1)}_{\in U_1} + \underbrace{(1,0)}_{\in U_2}$$

$$\underbrace{(1,1)}_{U_1 + U_2} = \underbrace{(-1,1)}_{\in U_1} + \underbrace{(2,0)}_{\in U_2}$$

$V = \mathbb{R}^2$

$U_1 = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$

$U_2 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$

✓ $U_1 + U_2$ je přímý součet?

Tvrzení: Buďte U_1, U_2 dva podpr. ve V. Následující podm. jsou ekvivalentní:

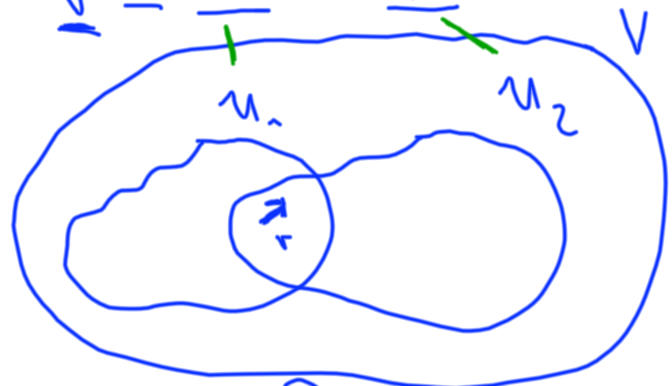
(1) $V = U_1 \dot{+} U_2$,

(2) $V = U_1 + U_2$, $U_1 \cap U_2 = 0$

Důkaz: "⇒" z 1 plyne ex. rozkladu $\forall v \in V: v = u_1 + u_2$, $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$ $\Rightarrow$ $V = U_1 + U_2$.

Využijeme jednozn. rozkladu. $v \in U_1 \cap U_2$

$$v = \underline{v} + \underline{0}$$



$$v = \underline{0} + \underline{v}$$

$$\Rightarrow v = 0 \Rightarrow U_1 \cap U_2 = 0$$

"⇐" cvičení

□

Tvrzení: Buďte U_1, U_2 podpr. kon. rozm. v. pr. V. Všechf $V = U_1 + U_2$. Pak násl. podmínky jsou ekvivalentní:

(1) $V = U_1 \dot{+} U_2$,

(2) $\dim V = \dim U_1 + \dim U_2$.

Důkaz: "$\Rightarrow$" $\dim U_1 + \dim U_2 = \dim(\underbrace{U_1 + U_2}_{=V}) + \dim(\underbrace{U_1 \cap U_2}_{\{0\}})$, $\dim\{0\} = 0$

$\Rightarrow \dim V = \dim U_1 + \dim U_2$

"$\Leftarrow$"

$\dim U_1 + \dim U_2 = \dim(\underbrace{U_1 + U_2}_{=V}) + \underbrace{\dim(U_1 \cap U_2)}$

$\dim U_1 + \dim U_2 = \dim V$

$\Rightarrow \dim(U_1 \cap U_2) = 0$

$\Rightarrow V = U_1 \dot{+} U_2$

$\square$

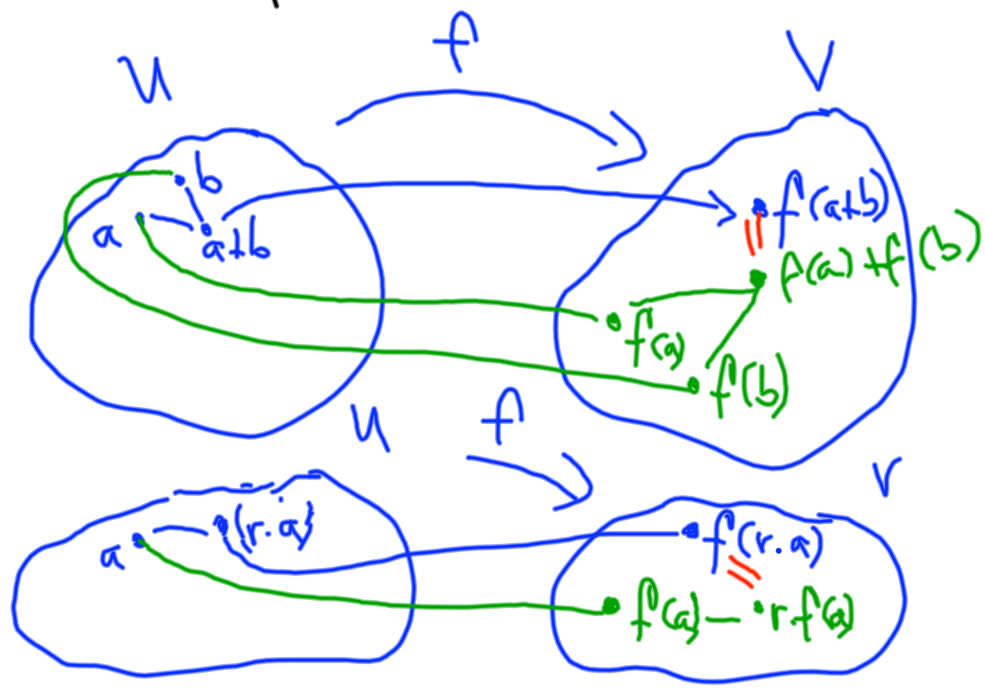
Lineární zobrazení

Definice: Buďte U, V vekt. pr. Zobrazení $f: U \to V$ se nazývá lineární (přesněji lineární nad polem P), jestliže platí

(i) $f(a +_U b) = f(a) +_V f(b)$

(ii) $f(r \cdot_U a) = r \cdot_V f(a)$

$\forall a, b \in U, \forall r \in P.$



Příklady: $U = \mathbb{R}$ $\quad P = \mathbb{R}$

$V = \mathbb{R}$

$z : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x$

1. z je zobrazení
2. Linearita

$\mathbb{R}$ nad $\mathbb{R}$ je v. pr. ($\mathbb{R}$ je pole)

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}: L_1 = z(x_1 + x_2) = x_1 + x_2$

$\forall r \in \mathbb{R}$ $\quad P_1 = z(x_1) + z(x_2) = x_1 + x_2$

$L_2 = z(r \cdot x_1) = r \cdot x_1$

$P_2 = r \cdot z(x_1) = r \cdot x_1$

$\Rightarrow z$ je lineární zobrazení

$U = \mathbb{C}$

$V = \mathbb{C}$

$P = \mathbb{R}$

$a+ib \mapsto a$

$\mathrm{Re}\,z : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{1}{2}(z+z^*)$

$z = a+ib \quad a,b \in \mathbb{R}$

$\frac{1}{2}(z+z^*) = \frac{1}{2}(a+\cancel{ib}+a-\cancel{ib})$

$= \frac{1}{2}\cdot 2a = \underline{a}$

✓ 1. Re z je zobrazení

✓ 2. $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$ je v. pr.?

$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ \forall r \in \mathbb{R}$

$L_1 = \mathrm{Re}\,z(z_1+z_2) = \mathrm{Re}\,z(a_1+ib_1+a_2+ib_2)$

$= \mathrm{Re}\,z(\underbrace{a_1+a_2}+i\cdot\underbrace{(b_1+b_2)}) = a_1+a_2$

$P_1 = \mathrm{Re}\,z(z_1)+\mathrm{Re}\,z(z_2) =$

$= \mathrm{Re}\,z(a_1+ib_1)+\mathrm{Re}\,z(a_2+ib_2) = a_1+a_2$

r_1+ir_2

$L_2 = \mathrm{Re}\,z(r\cdot z_1) = \mathrm{Re}\,z(r\cdot(a_1+ib_1)) =$

$= \mathrm{Re}\,z(r\cdot a_1+i\cdot(r\cdot b_1)) = r\cdot a_1$

$P_2 = r\cdot\mathrm{Re}\,z(z_1) = r\cdot\mathrm{Re}\,z(a_1+ib_1) = r\cdot a_1$

$\Rightarrow$ Re(z) je lineární zobrazení