Příklady (generátory v.p.):

1. $V = \mathbb{R}^2$, $P = \mathbb{R}$

$\times$ $u_1 = (0,0)$, $u_2 = (1,1)$

$\underline{\forall}\, u \in \mathbb{R}^2\ \exists\ p_1, p_2 \in \mathbb{R}$ tak, že

$u = (a,b)$
$a,b \in \mathbb{R}$

$u = p_1 \cdot u_1 + p_2 \cdot u_2$

$(a,b) = p_1 \cdot (0,0) + p_2 \cdot (1,1)$

$(a,b) = (p_1 \cdot 0, p_1 \cdot 0) + (p_2 \cdot 1, p_2 \cdot 1)$

$(a,b) = (0,0) + (p_2, p_2)$

$(a,b) = (p_2, p_2)$

$a = p_2$, $b = p_2$

$[\, p_2 = a \ (= b) \,]$

$\Rightarrow \{u_1, u_2\}$ není mn. gen. $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$

$u_3 = (0,1),\ u_4 = (1,0),\ u_5 = (1,1)$

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2\ \exists\ p_3, p_4, p_5 \in \mathbb{R}$ tak, že:

$(a,b) = p_3 \cdot u_3 + p_4 u_4 + p_5 \cdot u_5$

$(a,b) = p_3 (0,1) + p_4 (1,0) + p_5 \cdot (1,1)$

$(a,b) = (p_3 + p_5,\ p_4 + p_5)$

$a = p_3 + p_5$

$b = p_4 + p_5$

$p_3 + p_5 = a$

$p_4 + p_5 = b$

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} \underline{1} & 0 & 1 & a \\ 0 & \underline{1} & 1 & b \end{array}\right) \\ p_3 \quad p_4 \quad p_5 \end{array}$$

$(1,0)$

$p_3 = a - t$

$p_4 = b - t$

$p_5 = t$

$\binom{1}{0}$

$\Rightarrow \{u_3, u_4, u_5\}$ gen. v.p. $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$

Definice: Řekneme, že vektory $e_1, \dots, e_n \in V$ jsou <u>lineárně nezávislé</u>, jestliže z rovnosti

- $x_1 e_1 + \dots + x_n . e_n = 0$

  kde $x_1, \dots, x_n \in P$,

- plyne $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

Příklad viz předchozí příklad

položíme $(a, b) = (0, 0)$

$\Rightarrow p_3 = -t \quad \Rightarrow \exists$ i nenulové řešení $\Rightarrow$

$p_4 = -t \quad$ vekt. u_3, u_4, u_5 jsou <u>lin. záv.</u>

$p_5 = -t$

Definice: Báze vekt. pr. je lib. n-tice jeho lin. nez. generátorů.

Tvrzení: Buď $\{e_1, \dots, e_n\}$ báze v. pr. V. Pak pro každý vektor $v \in V$ existuje právě jedna n-tice skalárů $x_1, \dots, x_n \in P$ taková, že

$$v = x_1 . e_1 + \dots + x_n . e_n .$$

Důkaz: $e_1, \dots, e_n$ jsou báz. vektory $\Rightarrow$ gen pr. V

$\Rightarrow \forall v \in V \ \exists x_1, \dots, x_n \in P$ tak, že

- $v = x_1 . e_1 + \dots + x_n . e_n$

Ukázat jednoznačnost

Před., že $\exists$ i jiná taková n-tice, např. $y_1, \dots, y_n$.

- $\Rightarrow v = y_1 . e_1 + \dots + y_n . e_n$

$$\Rightarrow v - v = x_1 . e_1 + \dots + x_n . e_n - (y_1 . e_1 + \dots + y_n . e_n) =$$
$$= \underline{(x_1 - y_1) . e_1 + \dots + (x_n - y_n) . e_n}$$
$$= \underline{0}$$

Ovšem $e_1, \dots, e_n$ jsou lin. nezávislé

$\Rightarrow x_1 - y_1 = 0, \dots, x_n - y_n = 0$

$\Rightarrow x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n \Rightarrow$ spor

$\square$

Title: 2. 22-10:31 dop. (4 of 7)

Tvrzení: Buď $e_1, \ldots, e_n$ nějaká báze ve V. (Všechny souř. jsou vztaženy k této bázi.) Buďte $x_1, \ldots, x_n \in P$ souř. vektoru $u \in V$, $y_1, \ldots, y_n \in P$ souř. vektoru $v \in V$.

Pak jsou $x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n$ souř. vektoru $u + v$.

Buď dále $p \in P$ lib. skalár.

Pak jsou $p \cdot x_1, \ldots, p \cdot x_n$ souř. vekt. $p \cdot u$

Definice: Elementární úprava konečné
n-tice tvořené vektory $v_1, \dots, v_n \in V$.

⋮

Lemma: Nechť je n-tice $u_1, \dots, u_n \in V$
ekviv. s n-ticí $v_1, \dots, v_n \in V$.
Pak n-tice $u_1, \dots, u_n$ generuje
V právě tehdy, když n-tice
$v_1, \dots, v_n$ generuje V.

Důkaz: (úprava 2)

"$\Rightarrow$" $v_1, \dots, v_n$ gen. V

ukážeme, že i $u_1, \dots, u_n$ gen. V

$\forall v \in V \; \exists p_1, \dots, p_n \in P$ tak, že

$\underline{v} = p_1 \cdot v_1 + \dots + p_n \cdot v_n$

$v_i = c \cdot u_j + u_i$

pro ostatní je $v_j = u_j$ $(i \neq j)$

$v = p_1 u_1 + \dots + p_{i-1} \cdot u_{i-1} + p_i \cdot (c \cdot u_j + u_i)$
$+ p_{i+1} \cdot u_{i+1} + \dots + p_n \cdot u_n$

$= p_1 \cdot u_1 + \dots p_i \cdot u_i + \dots + (p_j + c \cdot p_i) u_j +$
$+ \dots + p_n \cdot u_n$

$\square$

Lemma: Nechť je n-tice $u_1, \dots, u_n$ ekviv. s n-ticí $v_1, \dots, v_n$. Vektory $u_1, \dots, u_n$ jsou lin. nez. právě tehdy, když jsou vektory $v_1, \dots, v_n$ lin. nez.

Lemma: Nechť vektory $v_1, \dots, v_n$ generují V, nechť jsou jiné vektory $u_1, \dots, u_m \in V$ lin. nezávislé, pak $n \geq m$.

Důsledek: Jsou-li $u_1, \dots, u_m$ a $v_1, \dots, v_n$ dvě baze vekt. pr. $V \Rightarrow n = m$.