Definice:

Vektorový prostor nad polem P je mn., řekněme V, spolu s:

1. $V \times V \to V$, $(a,b) \mapsto a+b$ .. sčítání
2. $0 \in V$ ... nula
3. $V \to V$, $a \mapsto -a$ ... opačný prvek
4. $P \times V \to V$, $(p,a) \mapsto p.a$ ... nás. skalárem

$\forall a,b,c \in V$, $\forall p,q \in P$:

(1) $a +_V b = b +_V a$

(2) $a +_V (b +_V c) = (a +_V b) +_V c$

(3) $a +_V 0_V = a$

(4) $a +_V (-a) = 0_V$

(5) $1 \cdot_V a = a$

(6) $p \cdot_V (q \cdot_V a) = (p \cdot_P q) \cdot_V a$

(7) $(p +_P q) \cdot_V a = (p \cdot_V a) +_V (q \cdot_V a)$

(8) $p \cdot_V (a +_V b) = (p \cdot_V a) +_V (p \cdot_V b)$.

$\left.\begin{matrix} +_P \\ \cdot_P \end{matrix}\right\}$ v poli P

$\left.\begin{matrix} +_V \\ \cdot_V \end{matrix}\right\}$ ve V

Prvky V se nazývají vektory.

Prvky P se nazývají skaláry.

Pozn.: $\underbrace{\underbrace{1}_{\in P} \cdot_V \underbrace{a}_{\in V}}_{\in V} = \underbrace{a}_{\in V}$

$$\underbrace{\underbrace{p}_{\in P} \cdot_V \underbrace{(\underbrace{q}_{\in P} \cdot_V \underbrace{a}_{\in V})}_{\in V}}_{\in V} = \underbrace{\underbrace{(\underbrace{p}_{\in P} \cdot_P \underbrace{q}_{\in P})}_{\in P} \cdot_V \underbrace{a}_{\in V}}_{\in V}$$

Příklady:

1. Reálný vekt. prostor Euklidovské geom.

2. P ... pole
P nad P je vekt. prostor

3. P nad Q, kde Q je podpole v P

4. P^n nad P

sčítání: $P^n \times P^n \to P^n$: $((u_1, \dots, u_n), (v_1, \dots, v_n))$
$\mapsto (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n)$

nás. skalárem:
$P \times P^n \to P^n$, $(p, (u_1, \dots, u_n)) \mapsto (p u_1, \dots, p \cdot u_n)$

5. $(M_{n,s}(P), +_{\text{matic}}, \cdot_{\text{matice skalárem}})$

6.

$p = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x^1 + a_0 \cdot x^0$

$p \in \underline{P_{n+1}(x)}$

Tvrzení:

Buď V konvrum. v. pr. nad P. Pak $\forall\, a, b \in V, \forall p, q \in P$:

(i) $0 \cdot a = 0$

(ii) $(-1) \cdot a = -a$

(iii) $(p-q) \cdot a = p \cdot a - q \cdot a$

(iv) $p \cdot (a-b) = p \cdot a - p \cdot b$

(v) Je-li $p \cdot a = 0$, pak $p = 0$ nebo $a = 0$.

Důkaz: $\underbrace{\underbrace{0}_{\in P} \cdot_V \underbrace{a}_{\in V}}_{\in V} = \underbrace{0}_{\in V}$

7. ax. V:

(7) $(p +_P q) \cdot_V a = p \cdot_V a +_V q \cdot_V a$, $p = 0_P$, $q = 0_P$

$$(\underbrace{0+0}_{= 0\ (3.\ ax.\ P)}) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a$$

$$0 \cdot_V a = 0 \cdot_V a +_V 0 \cdot_V a \quad \Big/ +(-(0 \cdot a))$$

$$\underbrace{0 \cdot a +_V (-(0 \cdot a))}_{4.\ ax.\ V\ =\ 0_V} = \underbrace{(0 \cdot a + 0 \cdot a) + (-(0 \cdot a))}_{2.\ ax.\ V:\ 0 \cdot a + (0 \cdot a + (-(0 \cdot a)))}$$

4. ax. V: $0 \cdot a + (-(0 \cdot a)) = 0$

$$0_V = \underbrace{\underbrace{0_P \cdot a}_{\in V} + 0_V}_{3.\ ax.\ V\ =\ 0_P \cdot a}$$

$$0_V = 0_P \cdot a$$

$$0_P \cdot a = 0_V$$

$\vdots$

$\square$

Definice:

(1) Buďte $u_1,\dots,u_n$ vektory z v. pr. V nad P.

Lineární kombinace vektorů $u_1,\dots,u_n$ s koef. $p_1,\dots,p_n$ je vektor

$$\overbrace{\underbrace{p_1}_{\in P}\cdot\underbrace{u_1}_{\in V}}^{\in V} +_V p_2\cdot u_2 +_V \dots +_V p_n\cdot u_n \in \underline{V}.$$

(2) Řekneme, že vektory $u_1,\dots,u_n$ **generují** V, je-li každý $v \in V$ jejich lin. kombinací.

(3) Prostor V, který má konečnou mn. gen. se nazývá **konečněrozměrný**.

Pozn.: ad (2) $\forall v \in V\ \exists p_1,\dots,p_n \in P$:

$$v = p_1\cdot u_1 + p_2\cdot u_2 + \dots + p_n\cdot u_n$$