Tvrzení (Cauchyho věta): Buďte A, B čtvercové matice. Pak platí

$$\det(A.B) = \det A . \det B$$

Důkaz:

a) A je elementární matice

a_1) $A = E_i(c)$

$$\underline{\det(A.B)} = \det(E_i(c).B) = c . \det B = \frac{\det E_i(c) . \det B}{\det B}$$

a_2) $A = E_{ij}$

$$\det(E_{ij}.B) = -\det B = \det E_{ij} . \det B$$

a_3) $A = E_{ij}(c)$

$$\det(E_{ij}(c).B) = \det B = \det E_{ij}(c) . \det B$$

b) $A = Q_n \cdot \ldots \cdot Q_1 \cdot E$

$n = 1$ … důkaz v a)

dále mat. indukce

c) A lze kon. posl. elem. úprav převést na jednotkovou matici (GJ tvar)

$$A = Q_n \cdot \ldots \cdot Q_1 \cdot \underset{\sim}{E} = Q_0$$

$$E_i(1)$$

d) $A = Q_n \ldots Q_1 \cdot N$

má nulový poslední řádek

d) $A = \underbrace{Q_n \cdots Q_1}_{= Q} . N = Q . \underbrace{N}_{\text{má nulový posl. řádek}}$

$$\det A = 0 = \det Q . \underbrace{\det N}_{= 0}$$

$$\det(A.B) = \det(Q.\underbrace{N.B}_{\text{má nulový posl. řádek}}) = 0$$

$$= \underbrace{\det(\underline{Q.N})}_{} . \det B$$

$$\Rightarrow \det(A.B) \overset{0}{=} \det A . \det B \qquad \square$$

Příklad: Dokažte, že $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

$$\det(A \cdot \underset{A^{-1}}{\underset{\parallel}{B}}) = \det A \cdot \det \underset{A^{-1}}{\underset{\parallel}{B}}$$

Pozn.: $\det(A \cdot A^{-1}) = \det(E) = 1$

$$1 = \det A \cdot \det A^{-1}$$

$$\Rightarrow \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Definice: Buď A det. řádu n. Buď A' matice vzniklá vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce v matici A. Determinant $\det A'$ řádu $n-1$ ozn. $\bar{A}_{ij}$ a nazývá se minor. Prvek $\hat{A}_{ij} = (-1)^{i+j}$ se nazývá kofaktor prvku A_{ij} (též algebraický doplněk).

Příklad:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{matrix}$$

A_{ij}	minor ($\bar{A}_{ij}$)	kofaktor ($\hat{A}_{ij}$)
A_{41}	-5	$(-1)^{4}\cdot(-5)=5$
A_{42}	-2	$(-1)^{4+2}\cdot(-2)=-2$
A_{43}	1	$(-1)^{4+3}(1)=-1$
A_{44}	-5	$(-1)^{4+4}\cdot(-5)=-5$

Laplaceova věta:

Pro každý index $i = 1, \dots, n$ platí:

$$\det A = \hat{A}_{i1} \cdot A_{i1} + \dots + \hat{A}_{in} \cdot A_{in}.$$

Příklad: A_1 $\quad \underline{i=4}$

$$\det A = \underset{\overset{\parallel}{5}}{\hat{A}_{41}} \cdot \underset{\overset{\parallel}{0}}{A_{41}} + \underset{\overset{\parallel}{-2}}{\hat{A}_{42}} \cdot \underset{\overset{\parallel}{1}}{A_{42}} + \underset{\overset{\parallel}{-1}}{\hat{A}_{43}} \, \underset{\overset{\parallel}{0}}{A_{43}} + \underset{\overset{\parallel}{-5}}{\hat{A}_{44}} \cdot \underset{\overset{\parallel}{0}}{A_{44}}$$

$$= -2 . 1 = -2$$

Definice: Buď A čtvercová matice. Utvořme matici $\hat{A}$ kofaktorů $\hat{A}_{ij}$. Položme

$$\operatorname{adj} A = \hat{A}^T.$$

Matice $\operatorname{adj} A$ se nazývá adjungovaná k matici A.

Tvrzení: Buď A matice řádu n s nenulovým determinantem. Pak je invertibilní a platí

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \operatorname{adj} A .$$