důkaz tvrzení – dokončení:

"$\Leftarrow$" 1. A je matice typu n/n nad P

2. A je invertibilní

$B \sim A$, B je v GJ tvaru

1. B má právě n hl. prvků

$\Rightarrow B = E$

2. B má méně než n hl. prvků

$\Rightarrow B$ má nulový poslední řádek

$$\underbrace{B \cdot X}_{\text{má opět nulový posl. řádek}} \qquad X \in M_{n/n}(P)$$

$$B = \underbrace{Q \cdot A}_{\text{invertib. obojí}}$$

$\Rightarrow B$ je invertibilní $\Rightarrow \exists B^{-1}$

X je lib., mohu tedy dosadit B^{-1}

Ovšem $B \cdot B^{-1} = E$, ale $B \cdot X$ je matice s nulovým posl. řádkom $\Rightarrow$ spor $\Rightarrow B$ má n hl. prvků $\square$

$$\left| \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{Q} & E \\ E & \xrightarrow{Q} & A^{-1} \end{array} \right| \qquad \begin{array}{l} E = Q_k \cdots Q_1 \cdot A \\ A^{-1} = Q_k \cdots Q_1 \cdot E \end{array}$$

Příklad: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = ?$

$$\cdot(-2) \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{A} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{E} \right) \sim \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{E} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{A^{-1}} \right)$$

Zk.: $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{-1} \cdot A = \dots$

Transponovaná matice.

Definice: <u>Transponovaná matice</u> k matici $A \in M_{rs}(P)$ je matice $\underline{A}^T \in M_{sr}(P)$, splňující

$$A^T_{ij} = A_{ji}.$$

Příklad:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
- $(\cdot)^T : M_{sr}(P) \to M_{rs}(P)$
  je hom. ad. grup

Determinanty

motivace:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A \in M_{33}(\mathbb{R})$$

rekt. pr.
$\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$

1. objem tělesa
2. $\exists$ inv. matice
3. výpočet inv. matice

Definice: Buď A čtvercová matice typu n/n nad P. Položme

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A_{1\sigma_1} \cdot \ldots \cdot A_{n\sigma_n}$$

Prvek $\det A \in P$ se nazývá <u>determinant matice A</u>.

Pozn.: 1. def. pouze pro čtvercové mat.

2. $\det : M_{nn}(P) \to P$

$$A \mapsto \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A_{1\sigma_1} \ldots A_{n\sigma_n}$$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \underbrace{\operatorname{sgn}\sigma}\cdot \underbrace{\underbrace{A_{1\sigma_1}}\underbrace{A_{2\sigma_2}}\cdots A_{n\sigma_n}}_{n \text{ prvků}}$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \qquad A_{\underset{r.}{1}\underset{s.}{\sigma_1}}$$

S_n - mn. všech permutací na mn. I_n

$I_n = \{1, 2, \dots, n\}$

S_n má $n!$ prvků

$\underline{n=3}$:

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$P_i=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

$$I_3=\{1,2,3\}$$

$$S_3=\{P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,P_6\}$$

$\det A =$

	inv.	$\operatorname{sgn} P_i$	
$P_1=\begin{array}{l} r: \\ s. \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	—	$(-1)^0=\underline{1}$	$+A_{11}\cdot A_{22}\cdot A_{33}$
$P_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$(3,2)$	$(-1)^1=-\underline{1}$	$-A_{11}\cdot A_{23}\cdot A_{32}$
$P_3=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$(2,1)$	$(-1)^1=-\underline{1}$	$-A_{12}\cdot A_{21}\,A_{33}$
$P_4=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$(2,1),(3,1)$	$(-1)^2=\underline{1}$	$+A_{12}\cdot A_{23}\cdot A_{31}$
$P_5=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$(3,1),(3,2)$	$(-1)^2=\underline{1}$	$+A_{13}\cdot A_{21}\cdot A_{32}$
$P_6=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$(3,2),(3,1),(2,1)$	$(-1)^3=-1$	$-A_{13}\,A_{22}\,A_{31}$

$$A = \left(\begin{array}{ccc} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \\ \hline A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{array}\right)$$

Príklad:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det B = ?$

$$B = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det B = 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 0$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

Tvrzení: Je-li některý řádek matice A nulový, pak $\det A = 0$.

Důkaz: $$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \cdot A_{1\sigma_1} \cdots A_{n\sigma_n}$$

Tvrzení: Jsou-li některé dva řádky matice A stejné, pak $\det A = 0$.

3. Cauchyho věta

Tvrzení: Buďte A, B dvě čtvercové matice. Pak platí

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

$$\det : (M_{nn}(P), \cdot, E) \longrightarrow (P, \cdot, 1)$$

$$A \mapsto \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \, A_{1\sigma_1} \cdots A_{n\sigma_n}$$