$r|s$

Definice: Buďte A, B matice téhož typu $r \times s$ nad týmž polem $\mathbb{F}$. Jejich **součet** je matice $A+B$ téhož typu a nad týmž polem $\mathbb{F}$, daná předpisem

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

$\forall i \in \{1, \dots, r\}, \forall j \in \{1, \dots, s\}$.

Příklady:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$A+B$ součet těchto dvou matic není definován

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A+B_1 = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+2 \\ 3+3 & 4+4 \\ 5+0 & 6+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$+ : M_{rs}(P) \times M_{rs}(P) \to M_{rs}(P)$$

Definice: <u>c-násobek</u> matice A kde $c \in P$, je matice cA typu r/s nad P, daná předpisem

$$(cA)_{ij} = c \cdot A_{ij}$$

$$\forall i \in \{1, \dots, r\}, j \in \{1, \dots, s\}.$$

Příklady:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$c_1 = 7$

$$c_1 \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 21 & 28 \\ 35 & 42 \end{pmatrix}$$

$c_2 = 0$

$$c_2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tvrzení: Nechť A, B, C jsou matice nad P.

Pak platí:

(1) $A + B = B + A$

(2) $(A + B) + C = A + (B + C)$

(3) $A + "O" = A$

(4) $A + ("-A") = O$

(5) $1 . A = A$

(6) $c . (A + B) = c . A + c . B$

(7) $(c + k) . A = c . A + k . A$

(8) $c (k . A) = (c k) . A$

Dowód: (2):

$$\underbrace{(A+B)+C}_{\overset{\parallel}{\text{ozn.}}\ U} = \underbrace{A+(B+C)}_{\overset{\parallel}{\text{ozn.}}\ V}$$

$\forall\, i \in \{1,\dots,r\},\ \forall\, j \in \{1,\dots,s\}$

$$\underline{U_{ij}} = \big((A+B)+C\big)_{ij} =$$
$$= (A+B)_{ij} + C_{ij} =$$
$$= (A_{ij}+B_{ij}) + C_{ij}$$
$$= A_{ij} + (B_{ij}+C_{ij})$$
$$= A_{ij} + (B+C)_{ij}$$
$$= \big(A+(B+C)\big)_{ij} = \underline{V_{ij}}$$

$\Rightarrow U = V$ $\square$

Příklad (násobení matic):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{array}{c} r|s \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} s|t \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} r|t \\ \begin{pmatrix} 1\cdot 1+2\cdot(-1) & \boxed{2} & 5 \\ -1 & 4 & 11 \\ -1 & 6 & 17 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$3|\cancel{2} \cdot \cancel{2}|3 = 3|3$$

$$(A \cdot B)_{12} = A_{11} \cdot B_{12} + A_{12} \cdot B_{22}$$

$$(A \cdot B)_{ij} = A_{i1} B_{1j} + A_{i2} \cdot B_{2j}$$

$$(A \cdot B)_{ij} = A_{i1} B_{1j} + A_{i2} B_{2j} + \dots + A_{is} B_{sj}$$

$$\underbrace{(A \cdot B)}_{\substack{r|s \;\; s|t \\ r|t}}{}_{ij} = \sum_{k=1}^{s} A_{ik} B_{kj}$$

Tvrzení: Nechť jsou A, B, C matice nad polem P. Pak platí

(9) $A.(B.C) = (A.B).C$

(10) $A.E = E.A = A$

(11) $A.(B+C) = A.B + A.C$

(12) $(A+B).C = A.C + B.C$

Pozn.:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & \emptyset \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ \emptyset & & & 1 \end{pmatrix}$$

Definice: Buď A čtvercová matice (n/n) nad P. Řekneme, že X je **inverzní** k A, je-li téhož typu n/n a platí

$$A \cdot X = X \cdot A = E.$$

Pozn.: $X = A^{-1}$

$$B = Q \cdot A$$

Elem. matice:

$$E_{ij}(c) = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & j & \\ & \ddots & c & \emptyset \\ & \emptyset & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} c \in P \\ i \neq j \text{ lib.} \end{array}$$

$$E_i(c) = i \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & c & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} c \neq 0 \\ c \in P \end{array}$$

$$E_{ij} = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & \cdots & 1 & \\ & & & \vdots & 1 & \vdots & \\ & & & 1 & \cdots & 0 & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Lemma: $(E_i(c))^{-1} = E_i(c^{-1})$

$$(E_{ij}(c))^{-1} = E_{ij}(-c)$$

$$(E_{ij})^{-1} = E_{ij}$$

Tvrzení: Čtvercová matice A je invertibilní právě tehdy, když je řádkově ekvivalentní s jednotkovou maticí.

Důkaz: "$\Rightarrow$" předp. A je čtvercová matice typu n/n a je řádkově ekviv. jednotkové matici

(máme ukázat, že je invertibilní)

$$E \sim A$$

$$Q^{-1} \;/\; E = Q\cdot A \qquad Q = Q_k \cdots Q_1$$

Pozn.: $Q^{-1} = (Q_2\cdot Q_1)^{-1} = Q_1^{-1}\cdot Q_2^{-1}$

$Q^{-1} = (Q_k \cdots Q_1)^{-1} = Q_1^{-1}\cdots Q_k^{-1}$

$$Q^{-1}\cdot E = \underbrace{Q^{-1}\cdot Q}_{E}\cdot A$$

$$Q^{-1} = E\cdot A$$

$$Q^{-1} = A \quad /^{-1}$$

$$\underline{A^{-1}} = (Q^{-1})^{-1} = \underline{Q}$$