Buď $(A, \cdot)$ pologrupa. Buď dán rozklad $\{A_i\}_{i \in I}$ na mn. A. Mn. všech tříd rozkladu ozn. $\tilde{A}$; nazývá se **faktorová množina**.

$$\tilde{A} = \{[a] \mid a \in A\}.$$

Pozn.: $I = \{1, 2, 3, \dots, n\}$

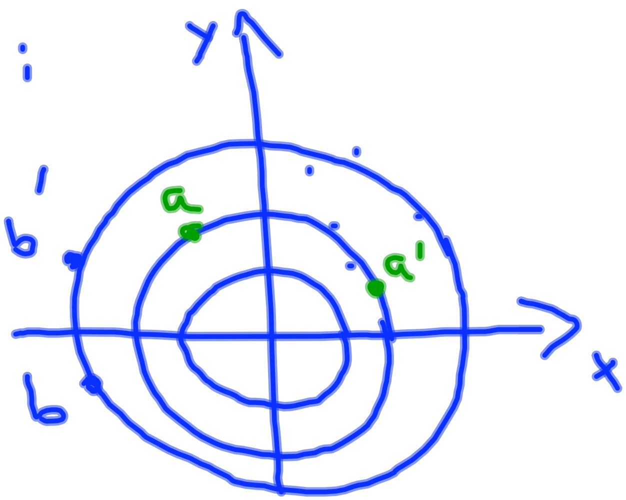
$$\tilde{A} = \{A_1, A_2, A_3\}$$

Nechť platí podm. kompatibility

jestliže $[a'] = [a]$, $[b'] = [b]$

$\Rightarrow [a'.b'] = [a.b]$

Příklad:



$[a] = [a']$

$[b] = [b']$

$\cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$((x,y),(x',y')) \longmapsto$

$\left(\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x'^2+y'^2}, 0\right)$

Asociativita:

$$\circ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ ((x,y),(x',y')) \mapsto \left(\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x'^2+y'^2}, 0\right)$$

$$\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3) \in \mathbb{R}^2 :$$

$$L = (x_1,y_1)\cdot\left((x_2,y_2)\cdot(x_3,y_3)\right) = (x_1,y_1)\cdot\left(\sqrt{x_2^2+y_2^2}+\sqrt{x_3^2+y_3^2}, 0\right)$$

$$= \left(\sqrt{x_1^2+y_1^2} + \sqrt{\left(\sqrt{x_2^2+y_2^2}+\sqrt{x_3^2+y_3^2}\right)^2 + \underbrace{0^2}_{=0}}, 0\right)$$

$$= \left(\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}+\sqrt{x_3^2+y_3^2}, 0\right)$$

$$P = ((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)) \cdot (x_3, y_3) =$$

$$= (\underbrace{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}_{x}, \underbrace{0}_{y}) \cdot (\underbrace{x_3}_{x'}, \underbrace{y_3}_{y'})$$

$$(\sqrt{\left(\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}\right)^2 + 0^2} + \sqrt{x_3^2 + y_3^2}, 0)$$

$$= \underline{(\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} + \sqrt{x_3^2 + y_3^2}, 0)}$$

$\Rightarrow L = P \Rightarrow \bullet$ je asociativní na $\mathbb{R}^2$

$$[a] \dagger [b] = [a \cdot b]$$

Pozn.: $\dagger : \tilde{A} \times \tilde{A} \to \tilde{A}, ([a],[b])$

$\mapsto [a \cdot b]$

$\text{"}\cdot\text{"} : A \times A \to A, (a,b) \mapsto a \cdot b$

Tvrzení: Je-li A pologrupa (monoid, grupa) splňující podm. kompatibility, pak: příslušná faktorová algebra $\tilde{A}$ je pologrupa (monoid, grupa).

Důkaz: $\tilde{A}$ je množina

$+$ je bin. op. na $\tilde{A}$

asociativit.

$\forall\ a, b, c \in A$

$L = ([a] + [b]) + [c] =$

$([a \cdot b]) + [c] = [(a \cdot b) \cdot c]$

$= [(a \cdot b) \cdot c] = [a \cdot (b \cdot c)] =$

$= [a] + [b \cdot c] = [a] + ([b] + [c])$

$= P \Rightarrow +$ je na $\tilde{A}$ asociativní

$(A, \cdot, e)$

$\forall \; a \in A$

$[a] + [?] = [?] + [a] = [a]$

$[a] + [e] = [a \cdot e] = [a]$

$= [e \cdot a] = [a]$

$$p : A \to \tilde{A},\ a \mapsto [a]$$

Rozkladu na mn. A odp. relace ekv. $\equiv$ (def. předpisem:

$$x \equiv y \iff [x] = [y]\ ).$$

Podm. komp. pak lze psát takto:

$$a \equiv a',\ b' \equiv b \Rightarrow a' \cdot b' \equiv a \cdot b$$

Relace splňující tuto podm. se nazývá <u>kongruence</u>.

Pole

$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

Definice: Pole je mn., řekněme P, spolu s

a) bin. op. sčítání $+ : P \times P \to P$

b) bin. op. násobení $\cdot : P \times P \to P$

c) dvěma vyb. prvky $0, 1 \in P$ $(0 \neq 1)$

d) zobr. opačný prvek $- : P \to P$

e) zobr. převrácená hodnota $^{-1} : P \setminus \{0\} \to P \setminus \{0\}$

$\forall a, b, c \in P$

$(P, +, 0, -)$ je kom. grupa

$(P, \cdot, 1)$ je mon. kom. má inv. k všem prvkům, kromě nuly