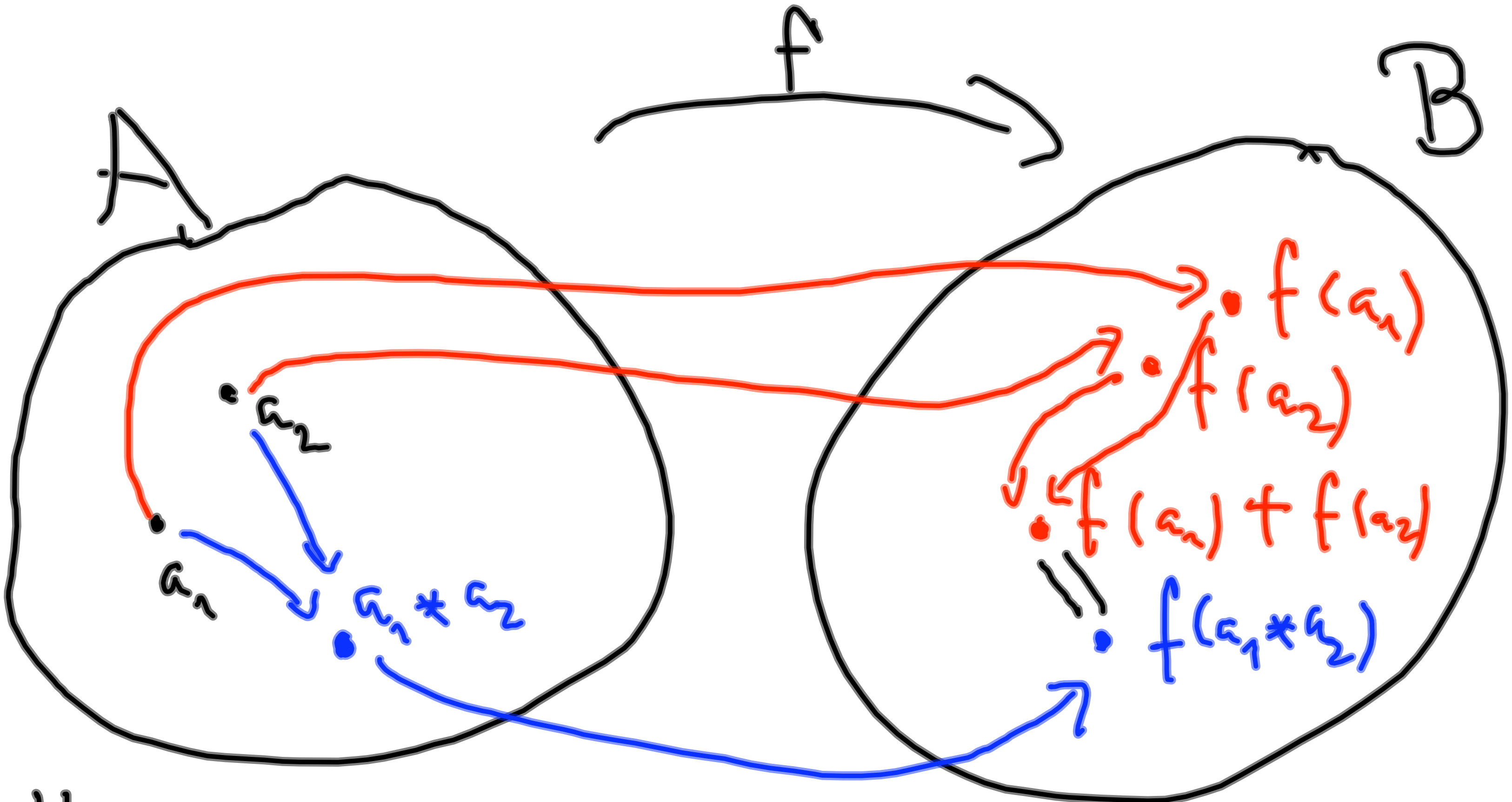
Definice: Buďte $(A, *)$ a $(B, +)$ dvě pologrupy. Zobrazení $f: A \to B$ se nazývá homomorfismus pologrupy jestliže $\forall a_1, a_2 \in A$ platí

$$f(a_1 * a_2) = f(a_1) + f(a_2).$$



$\forall a_1, a_2 \in A:$

$$f(a_1 * a_2) = f(a_1) + f(a_2)$$

Příklad:

$$g:(\mathbb{N},+)\to(\mathbb{Z},\cdot),\quad n\mapsto 0 \qquad (1)$$

$$\forall n_1,n_2\in\mathbb{N}$$

$$L=g(n_1+n_2)=0$$

$$P=g(n_1)\cdot g(n_2)=0\cdot 0=0$$

$\Rightarrow L=P \Rightarrow g$ je homomorfismus příslušných pologrup

Homomorfismus monoidů:

Příklady

$h: (\mathbb{N} \cup \{0\}, +, 0) \to (\mathbb{Z}, \cdot, 1), n \mapsto 1$

$$h(0) \overset{?}{=} 1$$

$L = h(0) = 1 = P$

Homomorfismus grupi

$$f(a^{-1})_A = (f(a))^{-1}_B$$

Příklad:

$\times$ $f: (\mathbb{R}, +, 0, -) \to (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot, 1, ^{-1})$, $r \mapsto 5$

$\times$ $r \mapsto r+1$

$r \mapsto 1$

$\forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}$

$L = f(r_1 + r_2) = 1$

$P = f(r_1) \cdot f(r_2) = 1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow L = P$

Title: 10. 26-10:28 dop. (5 of 9)

$\forall r \in \mathbb{R}:$

$L = f(-r) = 1$

$P = (f(r))^{-1} = \frac{1}{1} = 1$

$\Rightarrow L = P$

$f(0) = 1$

$\Rightarrow$ jde o hom. grup (f je hom. grup)

Tvrzení: Buďte $f: A \to B$, $g: B \to C$ hom. pologrup (monoidů, grup). Pak jejich kompozice $g \circ f: A \to C$ je opět hom. pologrup (monoidů, grup).

Důkaz: $g \circ f: A \to C$ je zobrazení $(C, \mathbin{\substack{+\\+}})$

$\underline{\forall a_1, a_2 \in A:}$

$$(g \circ f)(a_1 * a_2) \stackrel{?}{=} (g \circ f)(a_1) \mathbin{\substack{+\\+}} (g \circ f)(a_2)$$

$$\underline{(g \circ f)(a_1 * a_2)} = g(f(a_1 * a_2)) = g(\underbrace{f(a_1)} + \underbrace{f(a_2)}) =$$

$$= g(f(a_1)) \mathbin{\substack{+\\+}} g(f(a_2)) = \underline{(g \circ f)(a_1) \mathbin{\substack{+\\+}} (g \circ f)(a_2)}$$

$\Rightarrow$ jde o hom. pologrup

Tvrzení: Buďte $(A, *, e_A, ^{-1})$, $(B, +, e_B, ^{-1})$ dvě grupy. Buď $f: A \to B$ hom. pologrup $(A, *) \to (B, +)$. Pak f je hom. grup $(A, *, e_A, ^{-1}) \to (B, +, e_B, ^{-1})$.

Důkaz: ? $f(e_A) = e_B$

$\forall a_1, a_2 \in A: f(a_1 * a_2) = f(a_1) + f(a_2)$

$a_1 = a_2 = e_A$

$$\underline{f(e_A)} = f(e_A * e_A) = \underline{f(e_A) + f(e_A)} \;\Big|\; + f(e_A)^{-1}$$

$$f(e_A) + f(e_A)^{-1} = f(e_A) + f(e_A) + f(e_A)^{-1}$$

$$e_B = f(e_A) + e_B = f(e_A)$$

$\forall a \in A:$

? $f(a^{-1}_A) = (f(a))^{-1}_B$

$f(a) * f(a^{-1}) = e_B$

$e_B = f(e_A) = f(a * a^{-1}) = f(a) * f(a^{-1})$

$a^{-1} * a$