binární operace je zobrazení typu

$$A \times A \to A$$

Příklady:

✓ 1. "$+$": $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $(a, b) \mapsto a + b$

✗ 2. "$-$": $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $(a, b) \mapsto a - b$

✗ 3. "$-_1$": $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $(a, b) \mapsto a -_1 b$

✓ 4. "$-_2$": $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $(a, b) \mapsto a -_2 b$

Asociativní binární operace:

$\forall a, b, c$:

$* : A \times A \to A$

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

Příklad: "$-_2$" : $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $(a, b) \mapsto a -_2 b$

$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$:

$L = (a \text{"}-_2\text{"} b) \text{"}-_2\text{"} c = (a - b) \text{"}-_2\text{"} c = a - b - c$

$P = a \text{"}-_2\text{"} (b \text{"}-_2\text{"} c) = a \text{"}-_2\text{"} (b - c) =$

$= a - (b - c) = a - b + c$

$\Rightarrow L \neq P \Rightarrow$ tato bin. op.

není asociativní

$$o_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ (a, b) \mapsto b$$

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$L = (a \, o_2 \, b) \, o_2 \, c = b \, o_2 \, c = c$$

$$P = a \, o_2 \, (b \, o_2 \, c) = a \, o_2 \, c = c$$

$\Rightarrow L = P \Rightarrow$ bin op. o_2 je asociativní

Definice: Řekneme, že je dána pologrupa $(A, *)$, je-li dána

1. mn. A,
2. bin. operace "$*$", která je na A asociativní

Příklady: $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (násobení)

1. $(\mathbb{R}, \cdot)$
2. $(\mathbb{R}, +)$
3. $(\mathbb{R}, -)$ ✗
4. $(\mathbb{R}, \circ_2)$

Neutrální prvek:

$$* : A \times A \to A$$

$$\exists e \in A \ \forall a \in A :$$

$$a * e = e * a = a$$

$$\underbrace{\forall a \in A}\ \underbrace{\exists e \in A}$$

$$\underbrace{\exists e \in A}\ \underbrace{\forall a \in A} ;$$

Pr̃, :

$*: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (a,b) \mapsto a + b - 1$

$a * b = a+b-1$

$\forall\ a, b, c \in \mathbb{R}$

$L = (a * b) * c = (a+b-1) * c =$

$= a + b - 1 + c - 1 = a+b+c-2$

$P = a * (b * c) = a * (b+c-1) =$

$= a + b + c - 1 - 1 = a+b+c-2$

$\Rightarrow L = P \Rightarrow *$ je asoc.

$\forall a \in \mathbb{R}$; $\quad e \in \mathbb{R}$

$a * e = a \qquad\qquad e * a = a$

$a + e - 1 = a \qquad\qquad e + a - 1 = a$

$\underline{e = 1} \qquad\qquad \underline{e = 1}$

$\Rightarrow$ 1 je neutr. prvek pro $(\mathbb{R}, *)$

$(\mathbb{R}, *, 1)$ je pologrupa

Jednoznačnost neutr. prvku v monoidu.

$\exists e \in A, \forall a \in A:$
$a * e = e * a = a$

e', e''

- $e' = e'' * e'$ ... e'' je neutr. prvek
  $e'' = e' * e''$ ... e' je neutr. prvek
- $e'' = e'' * e'$ ... e' je neutr. prvek

$\Rightarrow e' = e''$

invertibilní prvek:

$$\forall a \in A \; \exists b \in A:$$

$$a * b = e = b * a$$

Grupa,

Příklady: $(\mathbb{R}, +, 0, -)$

X $(\mathbb{R}, \cdot, 1, ^{-1})$

$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot, 1, ^{-1})$

$\forall a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R}:$

$a * b = 1$ $\qquad$ $b * a = 1$

$\vdots$

$a + b - 1 = 1$

$b = 2 - a$

Zkouška:

$$a * b = a * (2-a) = a + (2-a) - 1 =$$
$$= a + 2 - a - 1 = 1$$