

Hladké struktury

Klasická analýza pojednává o reálných funkcích definovaných na podmnožinách prostoru \mathbf{R}^n . Globální analýza usiluje o uplatnění podobných metod na obecnějších množinách prostřednictvím tzv. hladké struktury. Podstatou hladké struktury je lokální ztotožnění dané množiny s prostorem \mathbf{R}^n podobně jako v kartografii je prostřednictvím mapy povrch koule lokálně ztotožňován s podmnožinou v \mathbf{R}^2 .

Množiny s hladkou strukturou splňující další přirozené topologické podmínky se nazývají hladké variety. Běžně se vyskytují v matematických modelech reality: povrchy oblých těles i prostory možných konfigurací nejrůznějších fyzikálních systémů je možno považovat za hladké variety. Časoprostor obecné teorie relativity je čtyřrozměrná varieta a v (dosud hypotetické) teorii strun je vesmír komplikovaná varieta dimenze nejméně 10. Variety obecně mohou mít netriviální topologii a nemusí být orientovatelné.

Jedním z cílů globální analýzy je studium hladkých zobrazení mezi varietami. Hladká jsou ta zobrazení mezi dvěma varietami, která jsou přirozeným způsobem slučitelná s hladkými strukturami.

Hladká struktura je jen technický prostředek k uplatnění matematické analýzy na varietě. V globální analýze se přednostně používají takové pojmy, které nezávisí na volbě mapy. Říkáme, že jsou invariantní vůči záměnám souřadnic nebo jen invariantní. Patří k nim zejména tečné vektory, vektorová pole a hladké formy. Velmi přehledně se na varietách formuluje integrální počet s využitím antisymetrických forem.

1. Mapy

Lokálního ztotožnění prostorů M a \mathbf{R}^n se dosahuje prostřednictvím bijektivních zobrazení zvaných mapy.

1.1. Definice. Je-li M množina a $n \in \mathbf{N}$ přirozené číslo, pak n -rozměrná mapa na množině M je podmnožina $U \subseteq M$ spolu s bijektivním zobrazením $x : U \rightarrow xU$, jehož obraz xU je otevřená množina v \mathbf{R}^n . Taková mapa se značí (U, x) . Číslo n se nazývá *dimenze mapy*.

Požadavek otevřenosti množiny xU vychází z potřeby definovat hladké funkce, což má rozumný smysl právě na otevřených množinách. Připomeňme, že *hladká* funkce $f : V \rightarrow \mathbf{R}$ je funkce definovaná na otevřené množině $V \subseteq \mathbf{R}^n$, která je spojitá a má spojitě parciální derivace všech řádů.

1.2. Definice. Buď (U, x) mapa na M . Řekneme, že funkce $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ je *hladká vzhledem k mapě* (U, x) , je-li $f \circ x^{-1}|_{xU} : xU \rightarrow \mathbf{R}$ hladká funkce.

V obecném případě mapa (U, x) přiřazuje bodu a množiny U jednoznačně určenou n -tici reálných čísel $(x_1(a), \dots, x_n(a)) \in \mathbf{R}^n$. Čísla $x_i(a)$ se nazývají *souřadnice* bodu $a \in U$, funkce x_i se nazývají *souřadnicové funkce* nebo též prostě *souřadnice* na U .

Namísto bijekcí $x : U \rightarrow xU \subseteq \mathbf{R}^n$ pochopitelně můžeme zadávat jejich inverze $y = x^{-1} : V \rightarrow yV \subseteq M$, kde V je otevřená podmnožina v \mathbf{R}^n .

Množina U se nazývá *definiční obor mapy* (U, x) . Ve výjimečném případě, kdy $U = M$, se souřadnice nazývají *globální*, jinak jsou *lokální*.

Zobrazení $f \circ x^{-1}|_{xU}$ z definice 1.2 je vlastně vyjádření funkce f v proměnných x_1, \dots, x_n ; požaduje se, aby závislost $f(x_1, \dots, x_n)$ byla hladká.

1.3. Příklady. (1) Triviálním příkladem mapy na množině \mathbf{R}^n je identické zobrazení $\text{id} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$. Jde o globální souřadnice.

(2) Příklad lokálních souřadnic: Buď S^1 jednotková kružnice. Vyberme pevný bod $a \in S^1$ libovolně. Pro jiný bod u necht' $\phi(u)$ označuje kladné reálné číslo rovné úhlové vzdálenosti bodu u od bodu a v kladném smyslu obíhání kružnice. Úhlová vzdálenost ϕ není jednoznačná funkce na S^1 : po jednom oběhu kružnice se její hodnota zvýší o 2π (a proto ϕ není globální souřadnice na S^1). Buď však $U_a = S^1 \setminus \{a\} \subset S^1$ množina vzniklá vynětím bodu a . Zobrazení $\phi|_{U_a} : U_a \rightarrow \phi U_a \subset \mathbf{R}$ je bijekce množiny U_a na otevřený interval $\phi U_a = (0, 2\pi)$. Tudíž, (U_a, ϕ) je 1-rozměrná mapa. Globální souřadnice na kružnici neexistují.

(3) Funkce $f : S^1 \rightarrow \mathbf{R}$ je hladká vzhledem k mapě (U_a, ϕ) , je-li $f(\phi)$ hladká funkce úhlu ϕ všude na U_a . Například $\cos \phi$ je korektně definovaná funkce $S^1 \rightarrow \mathbf{R}$ (geometricky představuje průmět do osy x), která je hladká vzhledem k libovolné mapě (U_a, ϕ) .

1.4. Příklady. (1) *Jednotková sféra* S^2 je množina bodů $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ splňujících

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Vložení $\iota : S^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$, $\iota(x, y, z) = (x, y, z)$, nepředstavuje souřadnice, protože obraz ιU není otevřená množina v \mathbf{R}^3 pro žádnou neprázdnou podmnožinu $U \subseteq S^2$ (žádný bod z S^2 totiž nemá trojrozměrné okolí ležící celé v S^2).

Nicméně, zobrazení $\xi : S^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, $\xi(x, y, z) = (x, y)$, poskytuje souřadnice, a to například na podmnožině U_+ zadané podmínkou $z > 0$ (severní otevřená polosféra), nebo na podmnožině U_- zadané podmínkou $z < 0$ (jižní otevřená polosféra). Obrazem obou polosfér je jeden a týž otevřený kruh $\xi U_+ = \xi U_- = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$.

(2) Aproximujeme-li zemský povrch sférou, pak zeměpisná délka ϕ (západní délky opatříme znaménkem minus) a zeměpisná šířka θ (jižní šířky opatříme znaménkem minus) představují bijektivní zobrazení množiny U vzniklé vynětím 180tého poledníku včetně obou pólů, přičemž obrazem xU je kartézský součin otevřených intervalů $(-\pi, \pi)$ a $(-\pi/2, \pi/2)$, což je otevřená podmnožina v \mathbf{R}^2 . Souřadnice ϕ, θ se nazývají *sférické souřadnice*. Pro bod $(x, y, z) \in S^2$ se zeměpisnou výškou θ a zeměpisnou šířkou ϕ platí

$$x = \cos \phi \cos \theta,$$

$$y = \sin \phi \cos \theta,$$

$$z = \sin \theta.$$

(3) *Stereografická projekce sféry* může být definována jako středové promítání se středem v libovolném bodě sféry na libovolnou rovinu neprocházející středem promítání. Pro určitost můžeme střed promítání volit v severním pólu $N = (0, 0, 1)$ a promítat na rovinu rovníku, kterou ztotožníme s \mathbf{R}^2 . Každý bod množiny $U = S^2 \setminus \{N\}$ má bijektivně přiřazenu dvojici reálných čísel $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ a $(U, (x, y))$ je mapa.

Existuje celá řada analogických kartografických zobrazení $S^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, například rovnoběžné nebo středové promítání na rovinu nebo alespoň rozvinutelnou plochu (válec či kužel). Stereografická projekce mezi nimi vyniká tím, že pokrývá celou sféru kromě jediného bodu.

Případ sféry S^2 je typický: Existuje řada různých možností, jak zavést ‘rozumné’ (sférické, stereografické, atd.) lokální souřadnice, ale žádný způsob, jak zavést globální souřadnice.

Hladkost funkcí ve smyslu definice 1.2 je závislá na volbě mapy. Často však dokážeme množinu M celou pokrýt mapami tak, aby daná funkce $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ byla hladká vzhledem ke všem zadaným mapám.

1.5. Příklad. Zeměpisná šířka $\theta : S^2 \rightarrow \mathbf{R}$. Ve sférických souřadnicích (2) je to přímo jedna ze souřadnicových funkcí. V souřadnicích (x, y) z (1) máme

$$\theta = \arcsin z = \pm \arcsin \sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

což je hladká funkce na obou polosférách.

1.6. Poznámka. Při volbě map se řídíme pragmatickými hledisky – cílem je pokrýt množinu M mapami (U, x) , které umožní zavést diferenciální počet funkcí relevantních pro právě řešenou úlohu. Můžeme se přitom řídit intuitivním pravidlem, podle něhož je dimenze n rovna počtu nezávislých spojitých parametrů, určujících “obecný” prvek množiny M . Příklady, které toto pravidlo potvrzují, naleznete všude v této kapitole.

Existují příklady “exotických” map, které naopak pravidlu odporují.

1.7. Exotický příklad. Buď U přímka v rovině \mathbf{R}^2 rovnoběžná s osou x . Její kolmé promítání na osu x představuje bijekci $U \rightarrow \mathbf{R}$, tedy jednorozměrnou mapu. Různé přímky rovnoběžné s osou x se neprotínají a jejich sjednocení pokrývá celou rovinu. Diferenciální počet v takové rovině bude také jednorozměrný – funkce je hladká vzhledem k takovému souboru map právě tehdy, když má všechny derivace $\partial^k/\partial x^k$, nemusí však mít derivaci $\partial/\partial y$.

2. Souhlasnost map a atlasy

Díky souřadnicím můžeme při studiu funkcí definovaných na M uplatňovat nástroje matematické analýzy. Kupříkladu, funkce $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ hladká vzhledem k mapě (U, x) má parciální derivace $\partial(f \circ x^{-1})/\partial x^i$. K tomu, abychom mohli studovat funkce definované na celé množině M , musíme množinu M pokrýt souborem (atlasem) překrývajících se map. Důležité je, aby v místech překryvů existovala transformace souřadnic, která by byla, pro potřeby analýzy, dostatečněkrát spojitě diferencovatelná.

Připomeňme, že zobrazení $F : U \rightarrow \mathbf{R}^n$ třídy C^∞ neboli *hladké* zobrazení je zobrazení, jehož komponenty F^1, \dots, F^n jsou hladké funkce. Kompozice dvou hladkých zobrazení je hladké zobrazení. Nakonec, *difeomorfismus* je bijektivní hladké zobrazení takové, že zobrazení k němu inverzní je rovněž hladké.

2.1. Definice. Mapy (U, x) a (V, y) na množině M se nazývají *souhlasné*, platí-li

1. $x(U \cap V)$ a $y(U \cap V)$ jsou otevřené množiny v \mathbf{R}^n ;

2. $y \circ x^{-1}|_{x(U \cap V)} : x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V)$,

$x \circ y^{-1}|_{y(U \cap V)} : y(U \cap V) \rightarrow x(U \cap V)$

jsou hladké bijekce.

Zobrazení $y \circ x^{-1}|_{x(U \cap V)}$ je transformace souřadnic na překrývajících se mapách. Pro nepřekrývající se mapy jsou obě podmínky triviálně splněny.

Požadavek 2 můžeme zestručnit: Zobrazení $y \circ x^{-1}|_{x(U \cap V)} : x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V)$ musí být difeomorfismus.

2.2. Příklady. (1) Ukažme, že všechny mapy (U, ϕ) na jednotkové kružnici z příkladu 1.3(2) jsou souhlasné. Transformační vztah mezi dvěma různými mapami (U, x) a (U', x') je lineární, potažmo hladké zobrazení $x' = x - \alpha$, kde α je úhlová vzdálenost levých krajních bodů oblouků U a U' . Inverzní zobrazení $x = x' + \alpha$ je rovněž lineární, a tedy hladké. Obě jsou difeomorfismy.

(2) Rovněž mapy na sféře z příkladů 1.4(1) a (2) jsou souhlasné. Formulemi

$$x = \cos \phi \cos \theta, \quad y = \sin \phi \cos \theta$$

je dán transformační vztah od sférických souřadnic ϕ, θ k souřadnicím x, y v oblasti $-\pi < \phi < \pi$, $0 < \theta < \pi/2$ resp. v oblasti $-\pi < \phi < \pi$, $-\pi/2 < \theta < 0$. Opačná transformace je

$$\phi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad \theta = \arcsin z = \pm \arcsin \sqrt{1 - x^2 - y^2};$$

znaménko volíme podle toho, zda se jedná o oblast U_+ nebo U_- (s vyjmutým poledníkem $x = 0, y \leq 0$).

(3) Rovněž mapa na sféře z příkladu 1.4(3) je souhlasná s mapou z příkladu 1.4(2). Přímka p spojující severní pól $(0, 0, 1) \in \mathbf{R}^3$ s bodem $(x, y, z) \in S^2$ o souřadnicích x, y protíná rovinu rovníku v bodě $(u, v, 0) \in \mathbf{R}^3$ o souřadnicích u, v tehdy a jen tehdy, když

$$u_{\pm} = \frac{x}{1 - z_{\pm}}, \quad v_{\pm} = \frac{y}{1 - z_{\pm}}, \quad \text{kde} \quad z_{\pm} = \pm \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

podle toho, zda promítaný bod leží na severní či jižní polokouli. Tím je dán transformační vztah od souřadnic x, y k souřadnicím u_+, v_+ v oblasti $0 < x^2 + y^2 < 1$ resp. k souřadnicím u_-, v_- v oblasti $x^2 + y^2 < 1$. Opačnou transformaci nalezněte jako cvičení.

Cvičení. V astronomii se sférické souřadnice vázané k rovině rovníku nazývají *rektascenze* α (délka) a *deklinace* δ (šířka) a nabývají hodnot v intervalech $0 < \alpha < 2\pi$ a $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Analogické souřadnice vázané k rovině ekliptiky, v níž obíhá Země kolem Slunce, budeme označovat α' a δ' . Rovina ekliptiky je určena úhlem sklonu ϵ k rovině rovníku a polohou jarního bodu Υ , což je jeden ze dvou průsečíků roviny ekliptiky a rovníku. Obě rektascenze se podle definice měří od jarního bodu, a proto $\alpha_{\Upsilon} = \alpha'_{\Upsilon} = 0$. Je-li $(x, y, z) \in S^2$ bod o rovníkové rektascenzi α a deklinaci δ , pak $x = \cos \alpha \cos \delta$, $y = \sin \alpha \cos \delta$, $z = \sin \delta$. Podobně, je-li $(x', y', z') \in S^2$ bod o ekliptikálních souřadnicích α', δ' , pak $x' = \cos \alpha' \cos \delta'$, $y' = \sin \alpha' \cos \delta'$, $z' = \sin \delta'$. Dokažte transformační vztahy

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha' &= \operatorname{tg} \alpha \cos \epsilon + \frac{\operatorname{tg} \delta}{\cos \alpha} \sin \epsilon, \\ \sin \delta' &= \sin \delta \cos \epsilon - \sin \alpha \cos \delta \sin \epsilon. \end{aligned}$$

Hodnotu α' v intervalu $(0, 2\pi)$ je nutno vybírat tak, aby $\cos \alpha'$ a $\cos \alpha$ měly stejné znaménko.

Návod: Od bodu (x, y, z) k bodu (x', y', z') přejdeme rotací o úhel ϵ kolem osy procházející jarním bodem: $x' = x$, $y' = y \cos \epsilon + z \sin \epsilon$, $z' = -y \sin \epsilon + z \cos \epsilon$.

Cvičení. Relace souhlasnosti map je reflexivní a symetrická. Dokažte.

2.3. Příklad. Mapa (\mathbf{R}, id) na přímce \mathbf{R} je nesouhlasná s mapou (\mathbf{R}, x) , kde $x(t) = t^3$ (třetí mocnina). Zobrazení $\text{id} \circ x^{-1} : t \mapsto t^{1/3}$ není hladké v bodě nula. Přitom obě mapy jsou souhlasné s mapou $(\mathbf{R}_+, \text{id}|_{\mathbf{R}_+})$. Tento příklad ukazuje, že relace souhlasnosti není tranzitivní.

Cvičení. Budte $(U, x), (V, y)$ souhlasné mapy na M . Necht' je f funkce hladká vzhledem k mapě $(U \cap V, x)$. Pak je f hladká i vzhledem k mapě $(U \cap V, y)$. Dokažte.

2.4. Definice. Soubor $\mathcal{U} = \{(U_i, x_i)\}_{i \in I}$ map na množině M se nazývá *atlas*, jestliže

- množiny U_i pokrývají množinu M , to jest, $M = \bigcup_{i \in I} U_i$;
- mapy $(U_i, x_i), (U_j, x_j)$ jsou souhlasné pro každou dvojici indexů i, j .

V příkladech 2.2 jsme zřejmě našli atlasy na kružnici S^1 a sféře S^2 (zde dokonce dva). Další příklady atlasů uvedeme níže.

2.5. Příklad. (1) Buď $P^{1,2}$ množina všech přímek v rovině \mathbf{R}^2 (nenechte se zmást tím, že "body" množiny $P^{1,2}$ jsou přímky). V kartézských souřadnicích x, y má přímka, která není rovnoběžná s osou y , rovnici $y = ax + b$. Parametry a, b , jimiž mohou být libovolná reálná čísla, určují takovou přímku jednoznačně, to jest, existuje bijekce mezi množinou U všech přímek v rovině nerovnoběžných s osou y a množinou \mathbf{R}^2 všech dvojic reálných čísel a, b . Obdrželi jsme mapu $(U, (a, b))$ na $P^{1,2}$.

(2) Podobně má přímka, která není rovnoběžná s osou x , rovnici $x = cy + d$. Dostáváme další mapu $(V, (c, d))$ na $P^{1,2}$, která spolu s první mapou pokrývá $P^{1,2}$. Vskutku, doplněk $P^{1,2} \setminus (U \cup V)$ sestává z přímek rovnoběžných s oběma osami a je tedy prázdný.

(3) Mapy $(U, (a, b))$ a $(V, (c, d))$ jsou souhlasné. Ověříme podmínky z definice 2.1.

1. Průnik $U \cap V$ obou map je tvořen přímkami nerovnoběžnými s žádnou osou, to jest přímkami splňujícími $a \neq 0, c \neq 0$. Obrazem průniku je v rámci mapy $(U, (a, b))$ množina $\{(a, b) \in \mathbf{R}^2 \mid a \neq 0\}$, v rámci mapy $(V, (c, d))$ množina $\{(c, d) \in \mathbf{R}^2 \mid c \neq 0\}$. Oba obrazy jsou otevřené množiny v \mathbf{R}^2 .

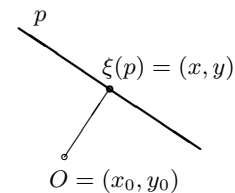
2. Najdeme transformaci od souřadnic a, b k souřadnicím c, d . Rovnici $y = ax + b$ převedeme na rovnici $x = y/a - b/a$ pokud $a \neq 0$. Dostáváme transformaci

$$c = \frac{1}{a}, \quad d = -\frac{b}{a},$$

což je difeomorfismus množiny $\{(a, b) \in \mathbf{R}^2 \mid a \neq 0\}$ na množinu $\{(c, d) \in \mathbf{R}^2 \mid c \neq 0\}$ (podrobně ověřte sami).

2.6. Příklad. Buď podobně $P^{2,3}$ množina všech rovin v prostoru \mathbf{R}^3 . V kartézských souřadnicích x, y, z má rovina, která není rovnoběžná s osou z , rovnici $z = ax + by + c$. Parametry a, b, c opět určují takovou přímku jednoznačně, čímž vzniká bijekce mezi množinou U všech rovin v prostoru nerovnoběžných s osou z a množinou \mathbf{R}^3 všech trojic reálných čísel a, b, c , vlastně mapa $(U, (a, b, c))$ na $P^{2,3}$. K pokrytí prostoru $P^{2,3}$ potřebujeme tři mapy, přičemž itá mapa sestává z rovin nerovnoběžných s itou osou. Dokažte souhlasnost map jako cvičení.

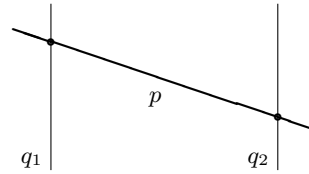
2.7. Příklady. (1) Uvažujme znovu o množině $P^{1,2}$ všech přímek v rovině \mathbf{R}^2 . Zvolme bod $O = (x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$. Buď p přímka neprocházející bodem O , označme $\xi(p)$ bod přímky p nejbližší bodu O (průsečík přímky p a kolmice spuštěné z bodu O). Korespondence mezi přímkami p a body $\xi(p)$ je bijekce mezi množinou U přímek neprocházejících bodem O a otevřenou podmnožinou $V = \mathbf{R}^2 \setminus \{O\}$ roviny \mathbf{R}^2 . Dostáváme tak 2-rozměrnou mapu (U, ξ) na $P^{1,2}$.



K pokrytí $P^{1,2}$ potřebujeme tři mapy určené třemi body O_1, O_2, O_3 neležícími v jedné přímce. Jako cvičení dokažte jejich souhlasnost.

(2) V prostoru \mathbf{R}^3 můžeme analogicky zavést bijektivní korespondenci mezi rovinami neprocházejícími pevným bodem O a body různými od O . Dostáváme 3-rozměrnou mapu na $P^{2,3}$. K pokrytí $P^{2,3}$ potřebujeme čtyři mapy určené čtyřmi body O_1, O_2, O_3, O_4 neležícími v jedné rovině. Jako cvičení dokažte jejich souhlasnost.

2.8. Příklady. (1) Uvažujme znovu o množině $P^{1,2}$ všech přímek v rovině \mathbf{R}^2 . Zvolme pevně dvě rovnoběžné přímky q_1, q_2 a jejich bijektivní zobrazení ξ_1, ξ_2 na \mathbf{R} . Buď U množina přímek p různoběžných s přímkami q_1, q_2 . Průsečíky $p \cap q_1$ a $p \cap q_2$ jednoznačně přímku p určují a čísla $\xi_1(p \cap q_1), \xi_2(p \cap q_2)$ mohou sloužit jako souřadnice na množině U .



Korespondence mezi přímkami p a dvojicemi x_1, x_2 je bijekce mezi množinou U přímek nerovnoběžných s přímkami l_1, l_2 a celou množinou \mathbf{R}^2 . Dostáváme tedy 2-rozměrnou mapu (U, ξ) na $P^{1,2}$. K pokrytí $P^{1,2}$ potřebujeme dvě mapy. Najděte druhou a jako cvičení dokažte jejich souhlasnost.

(2) Buď $P^{1,3}$ množina všech přímek v prostoru \mathbf{R}^3 . Zvolme pevně dvě rovnoběžné roviny Σ_1, Σ_2 a bijektivní zobrazení ξ_1, ξ_2 každé z nich na \mathbf{R}^2 . Buď U množina přímek p , různoběžných s rovinami Σ_1, Σ_2 . Průsečíky $p \cap \Sigma_1$ a $p \cap \Sigma_2$ jednoznačně přímku p určují a dvojice čísel $\xi_1(p \cap \Sigma_1), \xi_2(p \cap \Sigma_2)$ mohou sloužit jako souřadnice na množině U .

Korespondence mezi přímkami p a čtvercemi $x_1^1, x_1^2, x_2^1, x_2^2$ je bijekce mezi množinou U přímek nerovnoběžných s rovinami Σ_1, Σ_2 a celou množinou \mathbf{R}^4 . Dostáváme tedy 4-rozměrnou mapu $(U, (x_1^1, x_1^2, x_2^1, x_2^2))$ na $P^{1,3}$. K pokrytí $P^{1,3}$ potřebujeme tři mapy. Najděte je a jako cvičení dokažte jejich souhlasnost.

2.9. Příklady. (1) Zvolme v rovině libovolnou kružnici k a označme M_2 množinu všech dvouprvkových podmnožin $\{x_1, x_2\} \subset k$, kde $x_1 \neq x_2$. Budeme jim říkat dvojice bodů (nikoliv uspořádané). Každý z bodů dvojice je určen jednou úhlovou souřadnicí ϕ_1 resp. ϕ_2 . Abychom získali bijekci s otevřenou podmnožinou v \mathbf{R}^2 , musíme přejít od neuspořádané dvojice $\{\phi_1, \phi_2\}$ k uspořádané dvojici. Dohodněme se, že souřadnice ϕ_1, ϕ_2 uspořádáme podle velikosti, to jest, množině $\{x_1, x_2\}$ přiřadíme dvojici ϕ_1, ϕ_2 jestliže $\phi_1 < \phi_2$ a dvojici ϕ_2, ϕ_1 v opačném případě. Počítáme-li úhlové vzdálenosti ϕ_1, ϕ_2 od pevně zvoleného bodu $a \in k$, získáme souřadnice na množině U_a všech dvojic $\{x_1, x_2\}$, pro něž $a \notin \{x_1, x_2\}$. Obrazem množiny U_a je otevřená množina $\{(\phi_1, \phi_2) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < \phi_1 < \phi_2 < 2\pi\} \subset \mathbf{R}^2$. Množinu M_2 pokryjeme třemi mapami U_a, U_b, U_c , kde a, b, c jsou tři různé body kružnice k (dvě mapy U_a, U_b by nepokrývaly dvojici $\{a, b\}$).

(2) Zvolme v rovině libovolnou kružnici k a označme M_n množinu všech n -prvkových podmnožin $\{x_1, \dots, x_n\} \subset k$, kde body x_i jsou po dvou různé. Budeme jim říkat n -tice bodů (nikoliv uspořádané). Zvolíme-li bod $a \in k$, je každý z bodů x_i určen jedinou souřadnicí ϕ_i . Souřadnice opět pro jednoznačnost uspořádáme podle velikosti. Označme U_a množinu všech n -tic neobsahujících bod a , libovolné n -tici z U_a přiřadíme n -tici souřadnic ϕ_1, \dots, ϕ_n uspořádanou podle velikosti. Obrazem množiny U_a je otevřená množina $\{(\phi_1, \dots, \phi_n) \in \mathbf{R}^n \mid 0 < \phi_1 < \dots < \phi_n < 2\pi\}$. K pokrytí M_n potřebujeme $n + 1$ takových map (pouhých n map U_{a_1}, \dots, U_{a_n} by nepokrývalo n -tici $\{a_1, \dots, a_n\}$).

Nyní uvedeme další příklady, o kterých v dnešní době slyšela už i laická veřejnost. Konstruuje je ‘slepování okrajů’ jistých uzavřených podmnožin v \mathbf{R}^n . Kromě

dalších významů obou symbolů, $[a, b]$ označuje uzavřený interval s konci a, b a (a, b) označuje odpovídající otevřený interval.

2.10. Příklad. (1) *Möbiův pás.* Necht' N je součin $[-1, 1] \times (-1, 1)$. Necht' M je faktorová množina N/\sim podle relace ekvivalence \sim , ztotožňující body $(1, y)$ a $(-1, -y)$, $y \in (-1, 1)$. Möbiův pás si můžeme představit jako pás délky 2, jehož konce byly pootočeny o 180° a slepeny.

Množinu M lze pokrýt dvěma mapami. Mapa $U_1 \subseteq M$ necht' je součin $(-1, 1) \times (-1, 1)$ spolu s vložením $\phi_1 : U_1 \rightarrow \mathbf{R}^2$ (zde a v následujícím vynecháváme symbol faktorizace, pokud se v uvažované oblasti žádné dva různé body nezotožňují). Mapa $U_2 \subseteq M$ necht' je faktorový prostor $(([-1, 0] \cup (0, 1]) \times (-1, 1))/\sim$, který zobrazíme na otevřenou množinu $(-1, 1) \times (-1, 1)$ pomocí zobrazení ϕ_2 , které je na části $[-1, 0) \times (-1, 1)$ zadáno předpisem $(x, y) \mapsto (-x - 1, y)$ a na části $(0, 1] \times (-1, 1)$ předpisem $(x, y) \mapsto (-x + 1, -y)$. Na průniku obou částí, což je množina $(\{-1\} \times (-1, 1)) \cup (\{1\} \times (-1, 1))/\sim$, se oba předpisy shodují, a proto je ϕ_2 spojitě zobrazení. Dokažte souhlasnost těchto map jako cvičení.

(2) *Kleinova láhev.* Necht' N je válec, který je v cylindrických souřadnicích r, ϕ, z zadán rovnicemi $r = 1$ a $-1 \leq z \leq 1$. Necht' M je faktorová množina N/\sim podle relace ekvivalence \sim , ztotožňující body $(1, \phi, -1)$ a $(1, -\phi, 1)$ (pořadí souřadnic je r, ϕ, z). Kleinovu láhev si můžeme představit jako dutý válec délky 2, jehož koncové kružnice jsou přilepeny jedna k druhé s opačnou orientací. (Kleinovu láhev nelze vložit jako podvarietu do \mathbf{R}^3 , ale lze ji vložit do \mathbf{R}^4 .)

Podobně jako Möbiův pás, i Kleinovu láhev lze pokrýt dvěma mapami. Necht' U_1 je podmnožina množiny M , která je v cylindrických souřadnicích r, ϕ, z vymezena nerovnostmi $-\frac{1}{2} < z < \frac{1}{2}$. Zobrazení $x_1 : U_1 \rightarrow \mathbf{R}^2$, které je v polárních souřadnicích r', ϕ' na \mathbf{R}^2 zadáno formulími $r' = 2 + z$, $\phi' = \phi$, je bijekce na otevřenou podmnožinu v \mathbf{R}^2 , a sice na mezikružjí $\frac{3}{2} < r' < \frac{5}{2}$. Mapa $U_2 \subseteq M$ necht' je faktorový prostor množiny určené podmínkami $0 < z \leq 1$ a $-1 \leq z < 0$ (vzniklé z N vynětím kružnice $z = 1$) podle relace \sim' . Dokončete jako cvičení.

Nesprávný výběr dimenze n map, narušující pravidlo uvedené v poznámce 1.6, se projeví narušením souhlasnosti. Zvolíme-li n příliš velké, nebude xU otevřená množina v \mathbf{R}^n , jak jsme viděli při pokusu o zavedení tří souřadnic na sféře S^2 . Zvolíme-li naopak n příliš malé, nemusí být průniky $x(U \cap V)$ a $y(U \cap V)$ otevřené množiny.

2.11. Příklad. Uveďme příklad dvou takových nesouhlasných map. Vyjdeme z příkladu 1.7. Buď $M = \mathbf{R}^2$, $U = \{(u, v) \in M \mid v = 0\}$ (osa u) a $V = \{(u, v) \in M \mid u = 0\}$ (osa v). Buď $x = \text{id}|_U : U \rightarrow \mathbf{R}$ a $y = \text{id}|_V : V \rightarrow \mathbf{R}$. Pak je $U \cap V = \{(0, 0)\}$ v \mathbf{R}^2 a ani $x(U \cap V) = \{0\}$, ani $y(U \cap V) = \{0\}$ nejsou otevřené množiny v \mathbf{R} .

2.12. Definice. Řekneme, že funkce $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ je hladká vzhledem k atlasu $\mathcal{U} = \{(U_i, x_i)\}_{i \in I}$ map na množině M , je-li hladká vzhledem ke každé mapě (U_i, x_i) .

2.13. Příklad. (1) Necht' je v rovině \mathbf{R}^2 zvoleno n bodů $a_1, \dots, a_n \notin S^1$. Je-li x bod pohybující se po jednotkové kružnici S^1 , označme $V(x) = \sum_{i=1}^n v(x, a_i)$ součet vzdáleností od x k bodům a_i ; vzdálenost necht' je Eukleidovská, tedy $v(x, y) = \|y - x\| = (\sum_i (y^i - x^i)^2)^{1/2}$. Pak V je hladká funkce na S^1 vzhledem k atlasu z příkladu 1.3(2). Body kružnice, v nichž $dV/d\phi = 0$, se nazývají stacionární. Představme si, že bod x je spojen s body a_i pružinami stejné tuhosti, ale zanedbatelné délky (při nulovém zatížení); pak funkce V představuje energii tohoto fyzikálního systému. Stacionární body energie jsou body, v nichž je bod x v rovnováze (stabilní nebo nestabilní).

2.14. Příklad. Necht' je v rovině \mathbf{R}^2 zvoleno n bodů z_1, \dots, z_n . Je-li p přímka, označme

$v(p) = \sum_{i=1}^n d(p, z_i)^2$ součet čtverců vzdáleností od přímky p k bodům z_i . Ukažme, že v je hladká funkce na množině $P^{1,2}$ z příkladu 2.5.

Vzdálenost bodu $z = (x_0, y_0)$ od přímky $y = ax + b$ se měří na přímce vedené bodem z kolmo k přímce p a je dána formulí

$$d(p, z) = \frac{|y_0 - ax_0 - b|}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

Dvojmoc $d(p, z)^2$ je hladká funkce proměnných a, b , a tudíž funkce v je hladká vzhledem k mapě $(U, (a, b))$; podobně se ověří hladkost vzhledem k mapě V .

Stacionární body funkce V jsou řešením problému *lineární regrese* (nalezení přímky, která má od daných bodů minimální součet vzdáleností).

2.15. Označení. Bud' M množina s atlasem \mathcal{U} . Množina všech funkcí $f : M \rightarrow \mathbf{R}$, hladkých vzhledem k atlasu \mathcal{U} , se značí $C^\infty(M, \mathcal{U})$.

3. Souhlasné atlasy a hladké struktury

Jak jsem viděli, na množině může existovat více než jeden atlas. Ve všech shora uvedených příkladech však různé atlasy vytvářejí stejné soubory hladkých funkcí $C^\infty(M, \mathcal{U})$. Je tomu tak proto, že příslušné atlasy jsou souhlasné.

3.1. Definice. Bud' \mathcal{U} atlas na množině M . Mapa (U, x) na M souhlasná s každou mapou atlasu \mathcal{U} se nazývá *souhlasná s atlasem \mathcal{U}* .

3.2. Definice. Řekneme, že dva atlasy $\mathcal{U} = \{(U_i, x_i)\}_{i \in I}$ a $\mathcal{V} = \{(V_j, y_j)\}_{j \in J}$ jsou *souhlasné*, je-li každá mapa (U_i, x_i) jednoho atlasu souhlasná s každou mapou (V_j, y_j) druhého atlasu.

Cvičení. (1) Dokažte, že mapa (U, x) je souhlasná s atlasem \mathcal{U} právě tehdy, když je $\mathcal{U} \cup \{(U, x)\}$ opět atlas.

(2) Dokažte, že dva atlasy jsou souhlasné právě tehdy, když je jejich sjednocení opět atlas.

3.3. Tvzení. *Relace souhlasnosti atlasů je reflexivní, symetrická a tranzitivní.*

Důkaz. Reflexivita plyne z podmínky (b) z definice atlasu. Symetričnost plyne ze symetričnosti relace souhlasnosti map. Tranzitivita plyne z toho, že dvě mapy souhlasné s jedním a týmž atlasem jsou i vzájemně souhlasné, což je obsahem následujícího lemmatu.

3.4. Lemma. *Bud' $(U, x), (W, z)$ dvě mapy souhlasné s atlasem $\mathcal{V} = \{(V_j, y_j)\}_{j \in J}$. Pak jsou mapy $(U, x), (W, z)$ souhlasné.*

Důkaz. Především ukažme, že $x(U \cap W)$ je otevřená množina v xU . Protože $\{V_i\}_{i \in I}$ je pokrytí a x je bijekce, můžeme psát

$$\begin{aligned} x(U \cap W) &= x\left(U \cap W \cap \bigcup_{j \in J} V_j\right) = x\left(\bigcup_{j \in J} U \cap V_j \cap W\right) \\ &= \bigcup_{j \in J} x(U \cap V_j \cap W), \end{aligned}$$

kde každá z množin $x(U \cap V_j \cap W)$ je otevřená podmnožina v otevřené podmnožině $x(U \cap V_j) \subset xU$. Vskutku, $x(U \cap V_j \cap W)$ je obrazem otevřené množiny $y_j(U \cap V_j \cap W) = y_j(U \cap V_j) \cap y_j(V_j \cap W)$ v $y_j(U \cap V_j)$ při homeomorfismu (protože difeomorfismu) $xy_j^{-1} : y_j(U \cap V_j) \rightarrow x(U \cap V_j)$. Analogicky se ukáže, že $z(U \cap W)$ je otevřená podmnožina v zW .

Fakt, že $x \circ z^{-1}|_{z(U \cap W)} : z(U \cap W) \rightarrow x(U \cap W)$ je diffeomorfismus pak plyne z toho, že pro každé j je $x \circ z^{-1}|_{z(U \cap V_j \cap W)} = (x \circ y_j^{-1}|_{y_j(U \cap V_j \cap W)}) \circ (y_j \circ z^{-1}|_{z(U \cap V_j \cap W)})$ hladké zobrazení s hladkou inverzí

$$z \circ x^{-1}|_{x(U \cap V_j \cap W)} = (z \circ y_j^{-1}|_{y_j(U \cap V_j \cap W)}) \circ (y_j \circ x^{-1}|_{x(U \cap V_j \cap W)}).$$

3.5. Definice. *Maximální atlas* je atlas, který obsahuje všechny mapy na množině M , které jsou s ním souhlasné.

3.6. Důsledek. *Je-li \mathcal{V} atlas, pak množina $\bar{\mathcal{V}}$ všech map na množině M souhlasných s \mathcal{V} je maximální atlas.*

Maximální atlas $\bar{\mathcal{V}}$ z tvrzení 3.6 se nazývá *hladká struktura* určená atlasem \mathcal{V} . Dva souhlasné atlasy \mathcal{U} a \mathcal{V} na množině M určují jednu a tutéž hladkou strukturu $\bar{\mathcal{U}} = \bar{\mathcal{V}}$ na M , protože maximální atlas obsahující \mathcal{U} obsahuje i \mathcal{V} a naopak, načež $\bar{\mathcal{U}} = \bar{\mathcal{U}} \cup \bar{\mathcal{V}} = \bar{\mathcal{V}}$.

Nakonec tedy můžeme hladkou strukturu alternativně definovat jako třídu ekvivalence atlasů podle souhlasnosti. Každá třída $\{\mathcal{V}_i\}_{i \in I}$ souhlasných atlasů pak obsahuje právě jeden maximální atlas $\bar{\mathcal{V}}_i$, stejný pro všechna i .

Nyní se vraťme k otázce hladkosti.

3.7. Tvrzení. *Bud' \mathcal{U} atlas na množině M , bud' $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ funkce hladká vzhledem k atlasu \mathcal{U} . Pak je f hladká i vzhledem ke každé mapě souhlasné s atlasem \mathcal{U} .*

3.8. Důsledek. *Bud' $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ funkce hladká vzhledem k atlasu \mathcal{U} , pak je hladká i vzhledem k maximálnímu atlasu $\bar{\mathcal{U}}$.*

3.9. Důsledek. *Bud' $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ funkce hladká vzhledem k atlasu \mathcal{U} , pak je hladká i vzhledem ke každému souhlasnému atlasu \mathcal{V} .*

Jinak řečeno, pro souhlasné atlasy \mathcal{U}, \mathcal{V} platí $C^\infty(M, \mathcal{U}) = C^\infty(M, \mathcal{V})$.

4. Kartézský součin

Jsou-li $f_1 : P_1 \rightarrow Q_1$ a $f_2 : P_2 \rightarrow Q_2$ zobrazení, pak zobrazení $f_1 \times f_2 : P_1 \times P_2 \rightarrow Q_1 \times Q_2$ definujeme předpisem $(p_1, p_2) \mapsto (f_1(p_1), f_2(p_2))$. Nazývá se *kartézský součin* zobrazení f_1, f_2 .

4.1. Tvrzení. (1) *Bud' M množina s m -rozměrnou hladkou strukturou zadanou atlasem $\mathcal{U} = \{(U_i, x_i)\}_{i \in I}$. Bud' N množina s n -rozměrnou hladkou strukturou zadanou atlasem $\mathcal{V} = \{(V_j, y_j)\}_{j \in J}$. Označme $\mathcal{W} = \{(W_{ij}, z_{ij})\}_{(i,j) \in I \times J}$, kde $W_{ij} = U_i \times V_j$ a*

$z_{ij} = x_i \times y_j : U_i \times V_j \rightarrow \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{m+n}$. Systém \mathcal{W} je $(m+n)$ -rozměrný atlas na množině $M \times N$.

(2) Jsou-li \mathcal{U} a \mathcal{U}' souhlasné atlasy na M a \mathcal{V} a \mathcal{V}' souhlasné atlasy na N , pak jsou jim odpovídající atlasy \mathcal{W} a \mathcal{W}' rovněž souhlasné.

Důkaz. (1) Je třeba ověřit několik věcí. Zaprvé, každé zobrazení $z_{ij} : W_{ij} \rightarrow \mathbf{R}^{m+n}$ je bijektivní na svůj obraz $x_i U_i \times y_j V_j$, což je součin dvou otevřených podmnožin, a tedy otevřená podmnožina v \mathbf{R}^{m+n} . Tudíž, prvky (W_{ij}, z_{ij}) systému \mathcal{W} jsou mapy. Zadruhé, $M \times N = \bigcup_{i \in I, j \in J} W_{ij}$, tudíž mapy systému \mathcal{W} pokrývají množinu $M \times N$. Zatřetí, každé dvě mapy $(W_{i_1 j_1}, z_{i_1 j_1})$ a $(W_{i_2 j_2}, z_{i_2 j_2})$ jsou souhlasné. Vskutku, jsou-li (U_{i_1}, x_{i_1}) , (U_{i_2}, x_{i_2}) souhlasné mapy na M a (V_{j_1}, y_{j_1}) , (V_{j_2}, y_{j_2}) souhlasné mapy na N , pak $z_{i_1 j_1}(W_{i_1 j_1} \cap W_{i_2 j_2}) = x_{i_1}(U_{i_1 j_1} \cap U_{i_2 j_2}) \times y_{j_1}(V_{i_1 j_1} \cap V_{i_2 j_2})$. Dále, transformace souřadnic $z_{i_2 j_2} \circ z_{i_1 j_1}^{-1} = (x_{i_2} \times y_{j_2}) \circ (x_{i_1} \times y_{j_1})^{-1} = (x_{i_2} \circ x_{i_1}^{-1}) \times (y_{j_2} \circ y_{j_1}^{-1})$ je hladké zobrazení; podobné tvrzení pak platí i po záměně $i_1 \leftrightarrow i_2$ a $j_1 \leftrightarrow j_2$. Tudíž, \mathcal{W} je atlas.

(2) Podle již dokázané předchozí části (1) pro souhlasné mapy (U, x) , (U', x') na M a souhlasné mapy (V, y) , (V', y') na N platí, že kartézské součiny $(U \times V, x \times y)$ a $(U' \times V', x' \times y')$ jsou souhlasné mapy na $M \times N$.

Množina $M \times N$ s hladkou strukturou popsaná v předchozím tvrzení se nazývá kartézský součin množin s hladkou strukturou. Jsou-li M, N variety, je i $M \times N$ varieta (třída T_2 -prostorů se spočetnou bazí je uzavřená na konečné součiny).

4.2. Příklad. Kartézský součin jednotkových kružnic se nazývá anuloid neboli torus a značí se T . Máme tedy $T = S^1 \times S^1$.