DYNAMICKÉ SYSTÉMY I

Jana Dvořáková

Marek Lampart

Michaela Mlíchová

Lenka Obadalová

Předmluva

Tento učební text vznikl v rámci projektu FRVŠ č. 2644/2008. Jde o učební text určený pro první semestr předmětu Dynamické systémy I, který se zabývá diskrétními dynamickými systémy.

Text vychází z přednášek z předmětu Dynamické systémy I, které v letech 2005/06, 2007/08 a 2008/09 na Matematickém ústavu Slezské univerzity v Opavě přednášel RNDr. M. Lampart, Ph.D. a je určen především studentům magisterského (navazujícího) studijního programu Matematika.

Učební text je koncipován standardním způsobem: nejdříve definujeme základní pojmy a vlastnosti na obecném kompaktním metrickém prostoru. Poté odvozujeme některá tvrzení týkající se daných vlastností, případně některá důležitá tvrzení uvádíme bez důkazu. Průběžně uvádíme řešené příklady na konkrétních prostorech jako například interval, kružnice, čtverec nebo prostor posloupností. Obsahová stránka textu je určena současnými osnovami předmětu. Čtení textu předpokládá základní znalosti matematické analýzy, algebry a topologie.

Tématicky je text rozvržen do dvou částí. První část je tvořena třemi kapitolami: Základní pojmy (Mgr. J. Dvořáková), Kvadratický systém (RNDr. M. Mlíchová, Ph.D.) a Symbolická dynamika (RNDr. L. Obadalová). Druhá část Topologická dynamika (RNDr. M. Lampart, Ph.D.), se zabývá studiem dynamických vlastností na obecném kompaktním metrickém prostoru.

První tři kapitoly učebního textu vycházejí především z knih R.L. Devaneyho [**3**] a J. Smítala [**6**], závěrečná kapitola pak z knih P. Walterse [**7**] a H. Furstenberga [**8**]. Cílem autorů bylo vytvořit text, který čtenáře seznámí se základními pojmy diskrétních dynamických systémů srozumitelným způsobem. Jedná se o první verzi učebního textu, proto autoři budou velmi vděční za jakékoliv připomínky a náměty, které povedou k jeho zlepšení.

Opava, prosinec 2008 Autoři

Obsah

Seznam označení

$\mathbb{N}$	množina všech přirozených čísel
$\mathbb{Z}$	množina všech celých čísel
$\mathbb{R}$	množina všech reálných čísel
X, Y	kompaktní metrické prostory
I	uzavřený interval $[0, 1]$
S^1	jednotková kružnice se středem v počátku
$C(I)$	množina všech spojitých zobrazení z I do I
$C^1(I)$	množ. všech spojitě diferencovatelných zobrazení z I do I
$C(X)$	množina všech spojitých zobrazení z X do X
$\mathrm{Fix}(f)$	množina všech pevných bodů zobrazení f
$\mathrm{Per}(f)$	množina všech periodických bodů zobrazení f
$\omega_f(x)$	omega limitní množina zobrazení f v bodě x
$\mathrm{Rec}(f)$	množina všech rekurentních bodů zobrazení f
$\mathrm{UR}(f)$	množina všech uniformně rekurentních bodů zobrazení f
$\#A$	mohutnost množiny A

KAPITOLA 1

Základní pojmy

1.1. Základní definice

Buď (X, d) kompaktní metrický prostor s metrikou d, symbolem $C(X)$ označíme množinu všech spojitých zobrazení $X \to X$. Dále buď dáno zobrazení $f \in C(X)$. Potom se uspořádaná dvojice (X, f) nazývá *diskrétní dynamický systém.*

Pro $n \in \mathbb{N}$, *n-tá iterace zobrazení f*, $f^n \in C(X)$, je definována následujícím způsobem:

$$f^0(x) = id(x) = x, \qquad f^{n+1}(x) = f \circ f^n(x).$$

Zřejmě je tedy f^n kompozicí n zobrazení f, tj.

$$f^n(x) = (f \circ \cdots \circ f)(x).$$

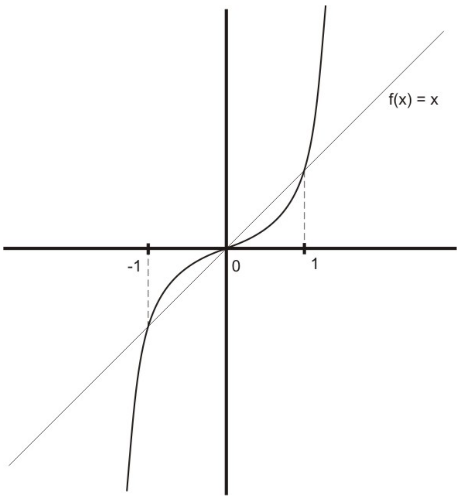
Pod *n-tou iterací bodu x (při zobrazení f)* rozumíme bod $f^n(x)$. Bod x_0 se nazývá *pevný bod* zobrazení f, jestliže $f(x_0) = x_0$. Bod p je *periodickým bodem* periody n, jestliže $f^n(p) = p$ a $f^i(p) \neq p$ pro $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Množinu všech pevných bodů zobrazení f značíme $\mathrm{Fix}(f)$, množinu všech periodických bodů zobrazení f periody n značíme $\mathrm{Per}_n(f)$, zřejmě $\mathrm{Fix}(f) = \mathrm{Per}_1(f)$. Množina všech iterací periodického bodu s periodou n tvoří *periodickou orbitu* (říkáme také, že generuje *n-cyklus*). *Dopředná orbita* bodu x je množina všech iterací bodu x pro $n \geq 0$, tj. $\mathrm{Orb}_f^+(x) = \left\{f^k(x) : k \geq 0\right\}$. Množinu bodů x, $f^{-1}(x)$, $f^{-2}(x)$, $\ldots$ nazýváme *zpětnou orbitou* bodu x a značíme ji $\mathrm{Orb}_f^-(x)$. *Plná orbita* bodu x je množina $\mathrm{Orb}_f(x) = \mathrm{Orb}_f^+(x) \cup \mathrm{Orb}_f^-(x) = \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} f^i(x)$. *Omega limitní množina* $\omega_f(x)$ bodu x při zobrazení f je množina všech hromadných bodů dopředné orbity bodu x, tj. $\omega_f(x) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{f^k(x) : k \geq n\}}$.
Vztah mezi orbitou a omega limitní množinou popisuje následující lemma, jehož důkaz přenecháváme čtenáři jako cvičení.

Lemma 1.1. $\overline{\mathrm{Orb}_f(x)} = \mathrm{Orb}_f(x) \cup \omega_f(x)$.

Poznámka 1.2. Pevné nebo periodické body nízké periody n lze tedy nalézt vyřešením rovnic $f(x) = x$, resp. $f^n(x) = x$. Pro $n > 4$ bývá často výpočet periodických bodů velmi složitý.

V následujících příkladech 1.3, 1.4, 1.6, si budeme výše definované pojmy ilustrovat pomocí spojitých zobrazení jednak "klasických" jednorozměrných prostorů (interval, kružnice), jednak dvojrozměrných prostorů.

Příklad 1.3. Pevné body zobrazení $f : [-1,1] \to [-1,1]$ definovaného předpisem $f(x) = x^3$ jsou $0, 1, -1$, tj. $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ a $f(-1) = -1$. Graficky jsou pevné body funkce f body, ve kterých graf funkce f protíná graf identické funkce $f(x) = x$. Nyní budeme zkoumat omega limitní množiny bodů $x \in \mathbb{R}$ při zobrazení f. Nejprve vezmeme $x \in (-1,1)$, pak $\omega_f(x) = \{0\}$, což plyne z faktu, že $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = 0$ pro tato x. Dále uvažujme $x \in \{-1,1\}$, pak $\omega_f(x) = \{-1\}$ nebo $\{1\}$. Obecně může mít funkce mnoho pevných nebo periodických bodů. Například každý bod funkce $f(x) = x$ je pevný bod a každý bod zobrazení $g(x) = -x$ s výjimkou nuly je periodický s periodou 2.



Obrázek 1. Funkce $f(x) = x^3$.

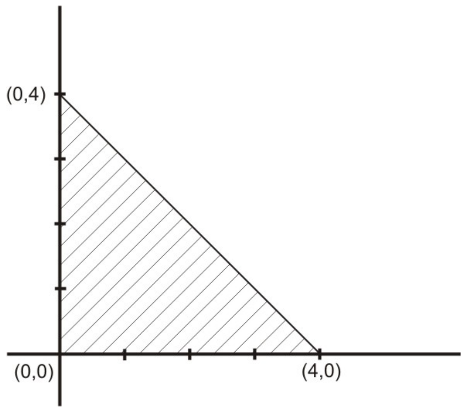
Příklad 1.4. Nechť je dáno zobrazení $f : S^1 \to S^1$ definované předpisem $f(\varphi) = \varphi + \varepsilon \sin(2\varphi)$ pro $0 < \varepsilon < 1/2$ a $\varphi \in [0, 2\pi)$, kde S^1 je kružnice $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, | x^2 + y^2 = 1\}$. Pevné body tohoto zobrazení jsou 0, $\pi/2$, π, $3/2\pi$. Pro pevné body x je zřejmě $\omega_f(x) = \{x\}$. Pro $x \in (0,\pi)$ je $\omega_f(x) = \{\pi/2\}$ a pro body $x \in (\pi, 2\pi)$ je $\omega_f(x) = \{3\pi/2\}$. Podobně můžeme na kružnici definovat i zobrazení předpisem $f(\varphi) = \varphi + \varepsilon \sin(k\varphi)$, kde $0 < \varepsilon < 1/k$. Periodické body a omega limitní množiny se v těchto případech vyšetří analogicky jako v předchozím příkladě.

Příklad 1.5. Uvažujme zobrazení $T_\lambda : S^1 \to S^1$ definované předpisem $T_\lambda(\varphi) = \varphi + 2\pi\lambda$, kde $\lambda \in \mathbb{R}$ a $\varphi \in [0, 2\pi)$ je úhel rotace. Je-li $\lambda = p/q$, kde $p, q \in \mathbb{N}$, pak $T_\lambda^q(\varphi) = \varphi + 2\pi p = \varphi$, tj. všechny body jsou periodické s periodou q.
Je-li λ iracionální číslo, hovoříme o *iracionální rotaci*. V takovém případě je množina periodických bodů prázdná a pro každé $x \in S^1$ je $\omega_{T_\lambda}(x) = S^1$.

Příklad 1.6. Nechť je dáno zobrazení $F : \triangle \to \triangle$ předpisem $F(x, y) = (x(4 - x - y), xy)$, kde $\triangle \subset \mathbb{R}^2$ je trojúhelník s vrcholy $(0, 0)$, $(0, 4)$, $(4, 0)$. Vyřešením soustavy rovnic

$$x(4 - x - y) = x, \ xy = y$$

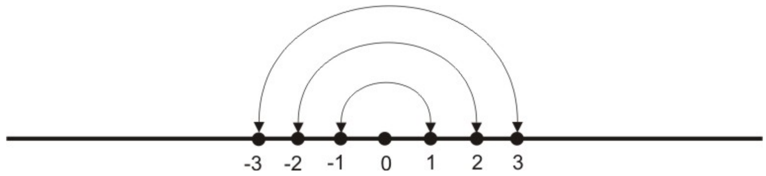
nalezneme pevné body zobrazení F, jsou to body $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(3, 0)$. Podobně periodické body periody dva získáme vyřešením následující rovnice $F^2(x, y) = (x, y)$. Existují dva takové body a leží na přímce $y = 0$. (Všimněme si, že zúžení $F|_{y=0} = (x(4-x), 0)$ je logistická funkce na intervalu $[0, 4]$ - viz Kapitola 2.) Netriviální omega limitní množiny jsou komplikované a dodnes není známa jejich přesná struktura.



Obrázek 2. Trojúhelník z příkladu 1.6.

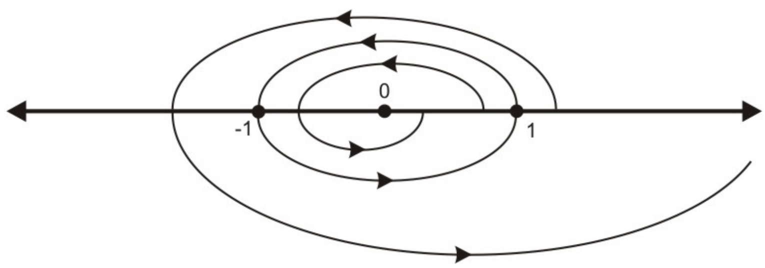
Jedním z užitečných způsobů popisu dynamického systému je tzv. *fázový portrét*. Jedná se o diagram na prostoru X, ve kterém pomocí šipek vyznačujeme chování systému - viz. následující příklady.

Příklad 1.7. Na obrázku 3 můžeme vidět fázový portrét funkce $f(x) = -x$. Bod 0 je pevným bodem této funkce, ostatní body jsou periodické s periodou dva.



OBRÁZEK 3. Fázový portrét $f(x) = -x$.

PŘÍKLAD 1.8. Buď $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem $f(x) = -x^3$. Bod 0 je pevným bodem zobrazení f, tj. $f(0) = 0$ a bod 1 tvoří dvojcyklus $f(1) = -1$, $f(-1) = 1$. Dále trajektorie bodů, jejichž absolutní hodnota je větší než 1, divergují do nekonečna. Trajektorie bodů, jejichž absolutní hodnota je menší než jedna, konvergují k nule. Fázový portrét této funkce je znázorněn na obrázku 4.



OBRÁZEK 4. Fázový portrét $f(x) = -x^3$.

Následující dvě věty ukazují, za jakých podmínek existují pevné body spojitých zobrazení. Brouwerova věta udává postačující podmínky pro existenci pevných bodů pro uzavřenou souvislou podmnožinu $\mathbb{R}^n$. Banachova věta popisuje situaci pro kontrakce úplných metrických prostorů.

VĚTA 1.9 (Brouwerova věta). *Buď X n-dimenzionální krychle, tj. $X = \{x \in \mathbb{R}^n | \, |x| \leq 1\}$. Pak každé spojité zobrazení $f : X \to X$ má alespoň jeden pevný bod* [**11**].

POZNÁMKA 1.10. Věta 1.9 neplatí na obecném kompaktním metrickém prostoru ani na kružnici (viz poznámka 1.20), neplatí ani na otevřeném disku. Je-li $D = \{z \in \mathbb{C} | \, |z| < 1\}$ a $f(x, y) = (1/2\,x - 1/2\,y, y)$, pak pevné body jsou $(1, y)$ a bod (1,0) leží na hranici D. Tedy pevný bod z Věty 1.9 může být na hranici X.

VĚTA 1.11 (Banachova věta). *Každá kontrakce f úplného metrického prostoru (X, d) má právě jeden pevný bod* [**10**].

VĚTA 1.12. *Buď $f \in C(X)$. Pak pevné body jsou izolované právě tehdy, když je jich konečně mnoho.*

DŮKAZ. Nejprve předpokládejme, že množina pevných bodů $\mathrm{Fix}(f)$ je nekonečná. Ukážeme, že pak musí existovat pevný bod, který není izolovaný.
Z kompaktnosti prostoru X víme, že posloupnost pevných bodů $\{x_i\}$ konverguje k bodu x_0. Dále pak z faktu, že funkce f je spojitá, plyne

$$f(x_0) = f(\lim_{i\to\infty}(x_i)) = \lim_{i\to\infty} f(x_i) = \lim_{i\to\infty}(x_i) = x_0.$$

Tedy bod x_0 je pevný a posloupnost $\{x_i\}$ konverguje k pevnému bodu, což je spor s předpokladem, že pevný bod je izolovaný.
Nyní předpokládejme, že množina pevných bodů $\mathrm{Fix}(f)$ je konečná. Označme $\delta = \min_{x_i \neq x_j,\ x_i, x_j \in \mathrm{Fix}(f)}\{d(x_i, x_j)\}$. Buď $U_{\delta/2}(x_i)$ okolí bodu x_i, pak zřejmě $U_{\delta/2}(x_i) \cap (\mathrm{Fix}(f) \setminus \{x_i\}) = \emptyset$, bod x_i je tedy izolovaný. $\square$

Následující tvrzení je speciálním případem Banachovy věty o pevném bodě.

VĚTA 1.13. *Buď $f \in C(I)$, předpokládejme, že $|f'(x)| < 1$ pro každé $x \in I$. Pak existuje jediný pevný bod zobrazení f. Navíc*

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|,$$

pro každé $x, y \in I$, $x \neq y$.

DŮKAZ. Z Věty 1.9 víme, že funkce f má alespoň jeden pevný bod. Budeme předpokládat, že body x, y, kde $x \neq y$, jsou pevné body zobrazení f, nechť je například $x < y$. Podle Věty o střední hodnotě existuje bod c takový, že $x < c < y$ a

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = 1.$$

To však vede ke sporu s naším předpokladem, že $|f'(x)| < 1$ pro každé $x \in I$, tedy i pro bod c. Odtud $x = y$.
V důkazu druhé části tvrzení použijeme opět Větu o střední hodnotě. Pro každé x, $y \in I$ takové, že $x \neq y$ dostaneme

$$|f(y) - f(x)| = |f'(c)|\,|y - x| < |y - x|.$$

$\square$

DEFINICE 1.14. Bod x se nazývá *téměř pevný*, jestliže existuje $m > 0$ tak, že $f^{i+1}(x) = f^i(x)$ pro všechna $i \geq m$. Bod x se nazývá *téměř periodický* s periodou n, jestliže existuje $m > 0$ tak, že $f^{n+i}(x) = f^i(x)$ pro všechna $i \geq m$.

Ilustrujme nyní definované pojmy na příkladech na intervalu a kružnici.

Příklad 1.15. Buď $f \in C(I)$, $f(x) = x^2$. Zopakujme, že bod 1 je pevným bodem tohoto zobrazení. Zatímco bod -1 je téměř pevný, tj. $f(-1) = 1$ a $f(1) = 1$. V případě zobrazení $g \in C(I)$, $g(x) = 1 - x^2$ je bod -1 téměř periodický s periodou 2 a trajektorie tohoto bodu je $\{-1, 0, 1, 0, 1, \dots\}$.

Příklad 1.16. Nechť je dáno zobrazení $f : S^1 \to S^1$ definované předpisem $f(\varphi) = 2\varphi$, kde $\varphi \in [0, 2\pi)$. Pevným bodem tohoto zobrazení je bod 0. Jestliže úhel $\varphi = 2k\pi/2^n$, pak $f^n(\varphi) = 2k\pi$ a úhel φ je téměř pevný bod. Z toho vyplývá, že množina téměř pevných bodů zobrazení f je hustá v S^1.

1.2. Šarkovského věta

Věta 1.17. *Nechť $f \in C(I)$. Předpokládejme, že f má periodický bod periody tři. Pak f má periodické body všech period.*

Důkaz. Důkaz věty je založen na dvou jednoduchých faktech. Nejprve, nechť I a J jsou uzavřené intervaly takové, že $I \subset J$ a $f(I) \supset J$, pak f má v intervalu I pevný bod, což je důsledek Věty o střední hodnotě.
Druhý fakt je následující: předpokládejme, že $A_0,\ A_1,\ A_2, \dots, A_n$ jsou uzavřené intervaly takové, že $f(A_i) \supset A_{i+1}$, pro $i = 0,\ 1, \dots, n-1$. Pak existuje alespoň jeden interval $J_0 \subset A_0$, který se zobrazuje na A_1. Podobně existuje podinterval v A_1, který se zobrazuje na A_2. Následně pak existuje podinterval $J_1 \subset J_0$ takový, že $f(J_1) \subset A_1$ a $f^2(J_1) \subset A_2$. Takto sestavíme posloupnost do sebe vložených intervalů, které se zobrazují do A_i, pro každé i. Odtud tedy existuje bod $x \in A_0$ takový, že $f^i(x) \in A_i$, pro každé i. Říkáme, že $f(A_i)$ pokrývá A_{i+1}.
Nechť $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ jsou periodické body periody tři. Předpokládejme, že $a < b < c$. Pak existují dvě možnosti $f(a) = b$ nebo $f(a) = c$. Předpokládejme, že $f(a) = b$, pak $f(b) = c$ a $f(c) = a$. Podobně pak pro $f(a) = c$.
Nechť $I_0 = [a, b]$ a $I_1 = [b, c]$. Z Věty o střední hodnotě vyplývá, že $f(I_0) \supset I_1$, $f(I_1) \supset I_1$ a $f(I_1) \supset I_0$. Ve cvičení 1.46 b) ukážeme, že f má pevný bod na intervalu I_1, tj. f má periodický bod periody jedna. Dále nechť $n \in \mathbb{N}$ a $n > 1$. Chceme ukázat, že f má periodický bod s periodou n. Vzhledem k tomu, že bod a je periodický s periodou 3, případ pro $n = 3$ je vyřešen, zbývá dokázat případ pro $n \neq 3$. Definujme posloupnost do sebe vložených uzavřených intervalů $I_1 = A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n$. Neboť $f(I_1) \supset I_1$, existuje podinterval $A_1 \subset A_0$ tak, že $f(A_1) = A_0 = I_1$. Dále existuje podinterval $A_2 \subset A_1$ tak, že $f(A_2) = A_1$, tedy $f^2(A_2) = A_0 = I_1$. Následně pak najdeme podinterval $A_{n-2} \subset A_{n-3}$ tak, že $f(A_{n-2}) = A_{n-3}$. Z předchozí

poznámky vyplývá, jestliže $x \in A_{n-2}$, pak $f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x) \subset A_0$ a skutečně $f^{n-2}(A_{n-2}) = A_0 = I_1$.
Nyní vzhledem k tomu, že $f(I_1) \supset I_0$, existuje podinterval $A_{n-1} \subset A_{n-2}$ tak, že $f^{n-1}(A_{n-1}) = I_0$. Nakonec, vzhledem k tomu, že $f(I_0) \supset I_1$, dostaneme $f^n(A_{n-1}) \supset I_1$ a tedy $f^n(A_{n-1})$ pokrývá A_{n-1}. Z první poznámky plyne, že f^n má v A_{n-1} pevný bod p.
Tvrdíme, že pevný bod p je periodický s periodou n. Skutečně, $n-2$ iterace p leží v I_1, $n-1$ iterace leží v I_0 a n-tá iterace je opět bod p. Jestliže $f^{n-1}(p)$ leží uvnitř intervalu I_0, pak je zřejmé, že p je periodický bod s periodou n. Jestliže $f^{n-1}(p)$ leží na hranici, pak $n = 2$ nebo 3 a důkaz je hotov. □

Příklad 1.18. Nechť je dána funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem $f(x) = -3/2\, x^2 + 5/2\, x + 1$. Lze snadno ověřit, že $f(0) = 1,\ f(1) = 2,\ f(2) = 0$, bod 0 je tedy periodický s periodou tři. Funkce f má tedy podle předchozí věty periodické body period všech řádů.

Věta 1.17 je speciálním případem následující, mnohem obecnější věty, dokázané A.N. Šarkovským, jejíž důkaz zde pro jeho náročnost neuvádíme.

Věta 1.19 (Šarkovského věta). *Nechť $f \in C(I)$. Na množině $\mathbb{N}$ přirozených čísel definujeme uspořádání následujícím způsobem:*

$$3 \prec 5 \prec 7 \prec \cdots \prec 2\cdot 3 \prec 2\cdot 5 \prec 2\cdot 7 \prec \cdots \prec 2^i\cdot 3 \prec 2^i\cdot 5 \prec 2^i\cdot 7 \prec \cdots \prec 2^j \prec 2^{j-1} \prec 2^{j-2} \cdots \prec 8 \prec 4 \prec 2 \prec 1.$$

(Tedy nejdříve všechna lichá čísla různá od jedničky vzestupně, pak jejich dvojnásobky, dále čtyřnásobky atd., až konečně sestupně mocniny čísla 2.)
Jestliže f má periodický bod periody m a $m \prec n$, pak f má periodický bod periody n [**2**].

Poznámka 1.20. Šarkovského věta neplatí pro obecný kompaktní metrický prostor. Například každý bod rotace kružnice $f(\varphi) = \varphi + 2/3\,\pi$, kde φ je úhel rotace, je periodický s periodou 3 a žádné jiné periodické body toto zobrazení nemá.

Věta 1.21. *Buď $f \in C(I)$. Pak posloupnost generovaná libovolným bodem $x \in I$ konverguje k pevnému bodu x_0 funkce f právě tehdy, když funkce f má cykly pouze prvního řádu* [**4**].

1.3. Hyperbolicita

V této části se budeme nejprve zabývat hyperbolicitou na intervalu, pak naše úvahy rozšíříme na $\mathbb{R}^n$.

DEFINICE 1.22. Buď f spojitá na $\mathbb{R}$. Bod x se nazývá *kritický bod* zobrazení f, jestliže $f'(x) = 0$. Kritický bod je *nedegenerovaný*, jestliže $f''(x) \neq 0$, v opačném případě je *degenerovaný*.

PŘÍKLAD 1.23. Zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dané předpisem $f(x) = x^2$ má nedegenerovaný kritický bod v 0, zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dané předpisem $f(x) = x^n$, kde $n > 2$, má degenerovaný kritický bod v 0.

DEFINICE 1.24. Buď p periodický bod s periodou n. Bod p se nazývá *hyperbolický*, jestliže $|(f^n)'(p)| \neq 1$.

DEFINICE 1.25. Pevný bod x_0 zobrazení $f : I \to I$ se nazývá

(1) *přitahující (atraktivní)*, jestliže existuje okolí U_{x_0} takové, že pro každé $x \in U_{x_0}$ posloupnost iterací $\{f^n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k x_0.
(2) *odpuzující (repulzivní)*, jestliže existuje okolí U_{x_0} takové, že pro každé $x \in U_{x_0},\ x \neq x_0$, existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $f^n(x) \notin U_{x_0}$.

VĚTA 1.26. *Každý přitahující nebo odpuzující pevný bod x_0 zobrazení f je izolovaný. Tedy existuje okolí přitahujícího nebo odpuzujícího bodu x_0, které neobsahuje žádný jiný pevný bod.*

DŮKAZ. Předpokládejme, že každé okolí U přitahujícího nebo odpuzujícího pevného bodu x_0 obsahuje jiný pevný bod y_0. Pak trajektorie generovaná bodem y_0 je konstantní, tedy ani nekonverguje k bodu x_0, ani nevyběhne ven z okolí U. Tedy x_0 není ani přitahující, ani odpuzující pevný bod. □

VĚTA 1.27. *Nechť x_0 je pevný bod zobrazení $f \in C(I)$.*

(1) *Jestliže všechna $x \neq x_0$ z nějakého okolí U_{x_0} splňují podmínku*

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| < 1, \tag{1.1}$$

pak x_0 je přitahující pevný bod.

(2) *Jestliže pro každé $x \neq x_0$ z nějakého okolí U_{x_0} platí*

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| > 1, \tag{1.2}$$

pak x_0 je odpuzující pevný bod.

Důkaz. Nechť je dán bod $\widetilde{x} \in U_{x_0}$, $\widetilde{x} \neq x_0$. Označme $x_{n+1} = f^n(\widetilde{x})$, pro $n = 1, 2, \dots$. Dále položme v podmínce (1.1) $x = x_n$ a dostaneme

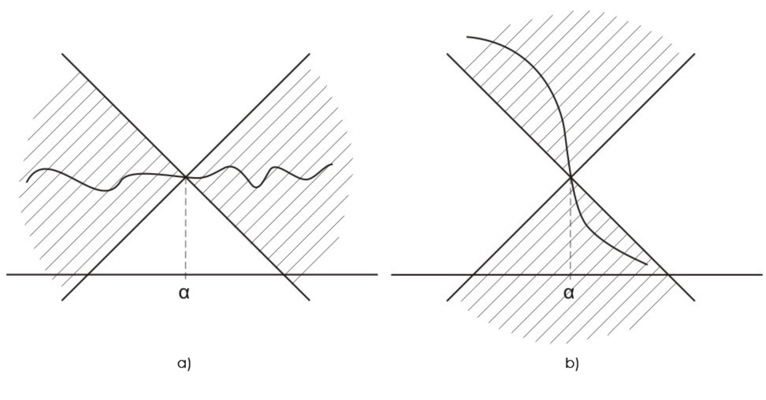
$$|f(x_n) - f(x_0)| < |x_n - x_0|,$$

protože $f(x_0) = x_0$ a $f(x_n) = x_{n+1}$, můžeme tento vztah dále upravit na

$$|x_{n+1} - x_0| < |x_n - x_0|.$$

Víme, že posloupnost $a_n = |x_n - x_0|$ je klesající a zdola ohraničená, proto konverguje k nějakému bodu a.
Stačí tedy dokázat, že $a = 0$. Předpokládejme, že $a > 0$. Z podmínky (1.1) plyne, že $f(x_0 - a) \in (x_0 - a,\ x_0 + a) = J$. Vzhledem k tomu, že f je spojitá funkce, existují okolí $U^-_{x_0-a}$ a $U^+_{x_0+a}$, která jsou podintervaly intervalu J. Jelikož $\lim_{n\to\infty} |x_n - x_0| = a$, pro nějaké n dostaneme $x_n \in U^-_{x_0-a}$ nebo $x_n \in U^+_{x_0+a}$. Pak $x_{n+1} = f(x_n) \in J$ a tudíž $|x_{n+1} - x_0| < a$, což je nemožné. Odtud $a = 0$ a x_n konverguje k x_0. Důkaz první části věty je dokončen, druhá část se dokáže analogicky. □

Poznámka 1.28. Podmínka (1.1) znamená, že graf funkce f v okolí bodu x_0 leží v oblasti, která je znázorněna na obrázku 5 a), zatímco podmínka (1.2) říká, že graf funkce f leží v oblasti znázorněné na 5 b).



Obrázek 5. Situace z věty 1.27

Věta 1.29. *Nechť má funkce $f \in C(I)$ derivaci v pevném bodě $x_0 \in I$. Pak,*
1. *je-li $|f'(x_0)| < 1$, x_0 je přitahující pevný bod;*
2. *je-li $|f'(x_0)| > 1$, x_0 je odpuzující pevný bod.*

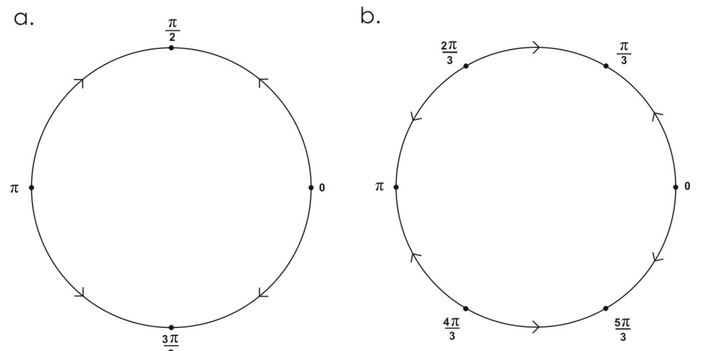
Důkaz. Důkaz věty vyplývá z faktu, že

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

a dále pak z věty 1.27. □

Příklad 1.30. Pevné body zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaného předpisem $f(x) = x^3$ jsou $0, 1, -1$, (viz příklad 1.3). Spočtěme derivaci funkce f v těchto pevných bodech, $f'(x) = 3x^2$, tedy $f'(0) = 0$ a $f'(\pm 1) = 3$. Podle věty 1.29 je 0 přitahujícím pevným bodem a ± 1 jsou odpuzující pevné body.

Příklad 1.31. Vraťme se nyní zpět k příkladu 1.4. Je dáno zobrazení $f : S^1 \to S^1$ definované předpisem $f(\varphi) = \varphi + \varepsilon \sin(2\varphi)$ pro $0 < \varepsilon < 1/2$ a $\varphi \in \mathbb{R}$. Spočtěme derivace funkce f v pevných bodech: $f'(0) = f'(\pi) = 1 + 2\varepsilon > 1$, zatímco $f'(\pi/2) = f'(3/2\,\pi) = 1 - 2\varepsilon < 1$. Z toho vyplývá, že 0 a π jsou odpuzující pevné body a $\pi/2$ a $3/2\,\pi$ jsou přitahující pevné body. Poznamenejme, že zde užíváme tvrzení formulované na intervalu, nikoliv na kružnici. Hyperbolicita je však vlastností lokální a můžeme se tedy zúžit na okolí daného pevného bodu, které je homeomorfní s intervalem.



Obrázek 6. Fázové portréty funkcí: a. $f(\varphi) = \varphi + \varepsilon \sin(2\varphi)$ a b. $f(\varphi) = \varphi + \varepsilon \sin(3\varphi)$.

Věta 1.32. *Buď $f \in C(I)$. Nechť pro nějaké $x \in I$ posloupnost $\{f^n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k bodu x_0. Pak je bod x_0 pevným bodem zobrazení f.*

Důkaz. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Jelikož je funkce f spojitá v bodě x_0, existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $y \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ platí

$$|f(y) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Můžeme předpokládat, že $\delta < \varepsilon$. Jelikož $f^n(x)$ konverguje k bodu x_0, pro dostatečně velké n dostaneme

$$|f^n(x) - x_0| < \delta < \varepsilon,$$

a proto

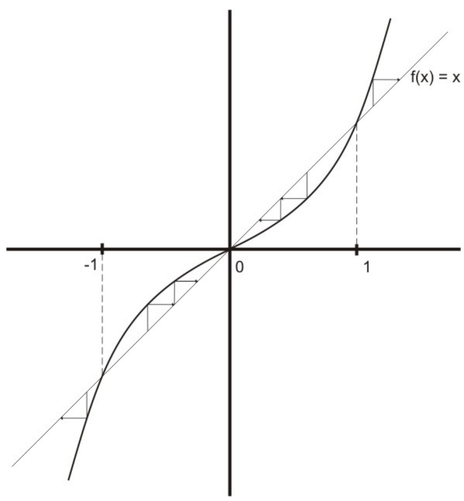
$$|f(f^n(x)) - f(x_0)| = \left|f^{n+1}(x) - f(x_0)\right| < \varepsilon.$$

Nakonec z předchozích dvou vztahů dostaneme

$$|f(x_0) - x_0| \leq \left|f(x_0) - f^{n+1}(x)\right| + \left|f^{n+1}(x) - x_0\right| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

pro všechna dostatečně velká n. Odtud $f(x_0) - x_0 = 0$ a bod x_0 je pevný bod. $\square$

Příklad 1.33. Pevné body zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daného předpisem $f(x) = (x^3 + x)/2$ jsou $0,\ 1,\ -1$. Nyní určíme, zda jsou hyperbolické. Najdeme hodnotu $f'(x)$ v pevných bodech: $f'(0) = 1/2$, $f'(1) = 2$, $f'(-1) = 2$, všechny jsou tedy hyperbolické. Graf funkce $f(x)$ je znázorněn na obrázku 7.



Obrázek 7. Graf funkce $f(x) = 1/2(x^3 + x)$.

Věta 1.34. *Nechť x_0 je hyperbolický pevný bod zobrazení $f \in C^1(I)$ a nechť platí $|f'(x_0)| < 1$. Pak je x_0 přitahující pevný bod.*

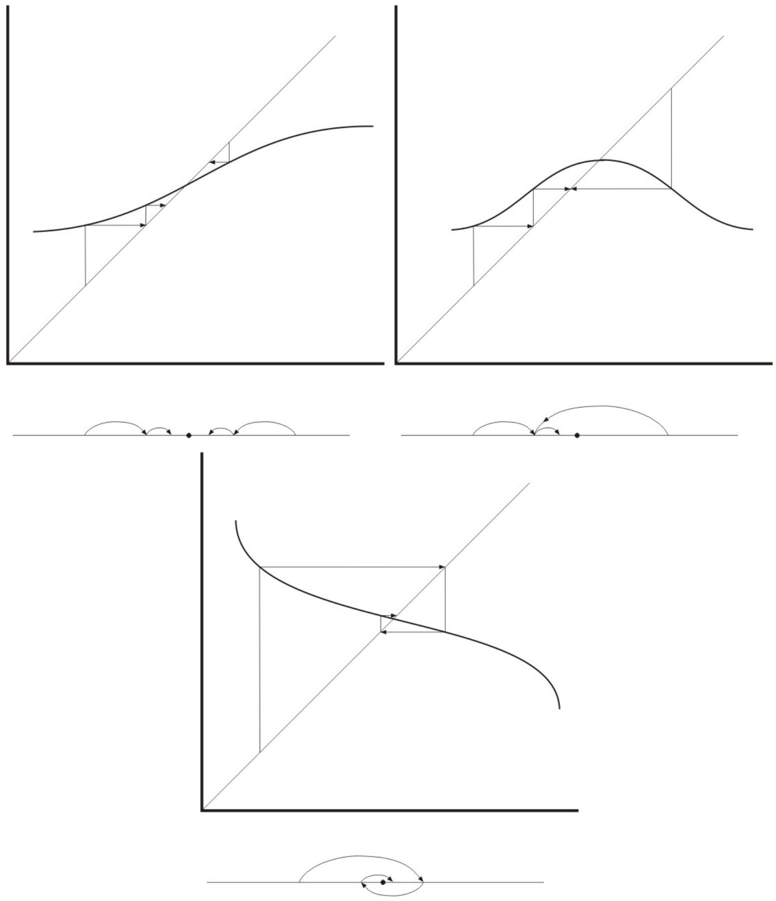
Důkaz. Z toho, že $f \in C^1$ plyne, že existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $|f'(x)| < c < 1$ pro $x \in [x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon]$. Z Věty o střední hodnotě platí

$$|f(x) - x_0| = |f(x) - f(x_0)| \leq c\,|x - x_0| < |x - x_0| \leq \varepsilon.$$

Funkční hodnota $f(x)$ je tedy obsažena v intervalu $[x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon]$ a navíc vzdálenost bodu $f(x)$ k bodu x_0 je menší než vzdálenost bodu x k bodu x_0. Stejným argumentem dostaneme

$$|f^n(x) - x_0| \leq c^n\,|x - x_0|$$

a tedy $f^n(x) \to x_0$ pro $n \to \infty$. $\square$



Obrázek 8. Fázový portrét v blízkosti přitahujícího pevného bodu.

Poznámka 1.35. Obdobný výsledek platí pro hyperbolický periodický bod p s periodou n. Navíc platí, že $f(U_p) \subset U_p$, kde U_p je okolí bodu p.

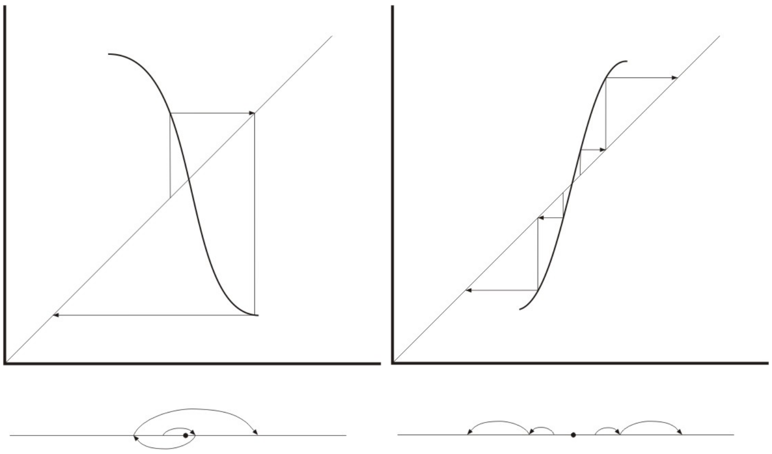
Důkaz následující věty je analogický jako důkaz Věty 1.34 a je přenechán jako cvičení.

Věta 1.36. *Nechť x_0 je hyperbolický pevný bod a dále nechť platí $|f'(x_0)| > 1$. Pak je x_0 odpuzující pevný bod.*

Nyní zobecníme pojmy atraktivity a repulzivity pro periodické body:

Definice 1.37. Nechť je dána spojitá funkce $f : I \to I$ a dále nechť body $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ tvoří cyklus řádu n. Pak je cyklus

(1) *přitahující* právě tehdy, když alespoň jeden z bodů cyklu je přitahující pevný bod f^n.



OBRÁZEK 9. Fázový portrét v blízkosti odpuzujícího pevného bodu.

(2) *odpuzující* právě tehdy, když všechny body cyklu jsou odpuzující.

VĚTA 1.38. *Buď $f \in C(I)$. Je-li jeden z bodů cyklu přitahující pevný bod f^k, pak jsou přitahující všechny body cyklu.*

DŮKAZ. Předpokládejme, že bod x_0 je přitahující pevný bod cyklu f^k, dále předpokládejme, že bod y_0 je jiný bod téhož cyklu. Chceme ukázat, že bod y_0 je přitahující pevný bod f^k.
Platí, že existuje $s < k$ tak, že $f^s(y_0) = x_0$. Z toho, že x_0 je přitahující pevný bod, vyplývá, že existuje okolí U_{x_0} takové, že pro každé $x \in U_{x_0}$ dostaneme $\lim_{n\to\infty} f^{nk}(x) = x_0$. Každá iterace zobrazení f je spojitá. Proto tedy ze spojitosti f^s a z faktu, že $f^s(y_0) = x_0$ vyplývá, že existuje okolí V_{y_0} takové, že $f^s(V_{y_0}) \subset U_{x_0}$.
Nyní nechť $y \in V_{y_0}$. Pak $f^s(y) \in U_{x_0}$ a

$$\lim_{n\to\infty} f^s(f^{nk}(y)) = \lim_{n\to\infty} f^{nk}(f^s(y)) = x_0.$$

Dále pak z faktu, že funkce f^{k-s} je také spojitá, dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} f^{nk}(y) = \lim_{n\to\infty} f^{k-s}(f^s(f^{k(n-1)}(y))) = f^{k-s}(x_0) = y_0.$$

Bod y_0 je tedy přitahující pevný bod cyklu f^k. □

VĚTA 1.39. *Nechť $f \in C(I)$ a nechť má derivaci v každém bodě intervalu I. Předpokládejme, že body $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k$ tvoří k-cyklus f. Položme $D = f'(x_1)\cdot\ f'(x_2)\cdot \ldots f'(x_k)$. Pak je cyklus přitahující, jestliže $|D| < 1$ a odpuzující, je-li $|D| > 1$.*

Důkaz. Nejprve využijeme pravidlo pro derivování složené funkce

$$[g(h(y))]' = g'(h(y))h'(y).$$

Aplikací na $f^k(y)$ dostaneme

$$\left[f^k(y)\right]' = f'(f^{k-1}(x))f'(f^{k-2}(x))\dots f'(f(x))f'(x).$$

Nyní položíme $y = x_1$ a využijeme rovností $x_2 = f(x_1),\ x_3 = f(x_2) = f^2(x_1)$ atd. Dále použijeme větu 1.27 a důkaz je dokončen. □

V případě přitažlivosti a odpudivosti pevných bodů dynamických systémů vyšší dimenze lze k jejich výpočtu využít prostředky lineární algebry.
Nechť je dáno lineární zobrazení $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, označme $x_1 = f_1(x, y, z)$, $x_2 = f_2(x, y, z)$ a $x_3 = f_3(x, y, z)$, kde vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ je obraz vektoru (x, y, z) vzhledem k zobrazení F. Ve vektorovém označení přepíšeme danou situaci následujícím způsobem:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) \\ f_3(x, y, z) \end{pmatrix}.$$

Pak můžeme spočítat parciální derivace zobrazení F podle jednotlivých proměnných a sestavit *Jacobiho matici* zobrazení F v bodě $\mathbf{x}$:

$$JD(F)(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_3}{\partial z}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Vlastní hodnoty této matice $JD(F)$ spočteme jako kořeny charakteristického polynomu $p(\lambda) = \det(JD(F)(\mathbf{x}) - \lambda E)$. Danou situaci můžeme zobecnit pro libovolné $n \in \mathbb{N}$.

Definice 1.40. Pevný bod x zobrazení $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se nazývá *hyperbolický*, jestliže pro všechny vlastní hodnoty λ_i Jacobiho matice $JD(F)(x)$ v bodě x platí, že $|\lambda_i| \neq 1$. Pokud x je periodický bod s periodou n, pak p je *hyperbolický*, jestliže pro všechny vlastní hodnoty $JD(F^n)(x)$ v bodě x platí, že $|\lambda_i| \neq 1$.

Existují tři různé typy hyperbolických bodů:

Definice 1.41. Nechť $F^n(x) = x$.

(1) Bod x se nazývá *přitahující periodický*, jestliže pro všechny vlastní hodnoty λ_i Jacobiho matice $JD(F^n)(x)$ platí, že $|\lambda_i| < 1$.
(2) Bod x se nazývá *odpuzující periodický*, jestliže pro všechny vlastní hodnoty λ_i Jacobiho matice $JD(F^n)(x)$ platí, že $|\lambda_i| > 1$.

(3) Bod x se nazývá *sedlový*, jestliže pro některé vlastní hodnoty λ_i Jacobiho matice $JD(F^n)(x)$ platí, že $|\lambda_i| < 1$, a zároveň pro některé vlastní hodnoty λ_j Jacobiho matice $JD(F^n)(x)$ platí, že $|\lambda_j| > 1$.

PŘÍKLAD 1.42. Vraťme se nyní k zobrazení $F : \triangle \to \triangle$ definovanému předpisem $F(x, y) = (x(4-x-y), xy)$ z příkladu 1.6 a určeme, zda je pevný bod $(1, 2)$ zobrazení F přitahující nebo odpuzující. Při řešení příkladu budeme vycházet z definice 1.41. Výpočtem rovnice $\det(JD(F)|_{x=(1,2)} - \lambda E) = 0$, tj.

$$\left| \begin{array}{cc} 4-2x-y & y \\ -x & x \end{array} \right|_{(1,2)} - \lambda \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right| = 0$$

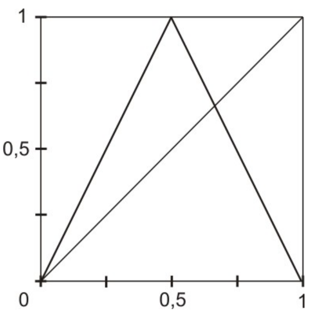
zjistíme, že vlastní hodnoty $|\lambda_{1,2}| > 1$, a proto je daný pevný bod odpuzující. Ověření přitažlivosti a odpudivity pevných bodů $(0, 0)$ a $(3, 0)$ přenecháváme čtenáři.

1.4. Cvičení

CVIČENÍ 1.43. Namalujte fázové portréty funkcí $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = -x/2$
b) $f(x) = x^{1/3}$
c) $f(x) = x^2$
d) $f(x) = \cos x$

CVIČENÍ 1.44. Nechť je dáno zobrazení *stan* (tent map) $T : [0, 1] \to [0, 1]$ definované předpisem: $T(x) = 1 - |1 - 2x|$.



OBRÁZEK 10. Zobrazení stan: $T(x) = 1 - |1 - 2x|$.

Nalezněte pevné, periodické a téměř periodické body tohoto zobrazení.

Cvičení 1.45. Dokažte následující tvrzení:

a) *Nechť je dáno zobrazení stan (ekvivalentní definice jako ve cvičení 1.44)*

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{jestliže} \quad 0 \le x \le 1/2, \\ 2-2x, & \text{jestliže} \quad 1/2 \le x \le 1. \end{cases}$$

Nechť $I_{n,k} = [(k-1)/2^n,\ k/2^n]$, *kde* $k = \{1, 2, 3, \ldots, 2^n\}$ *a* $n \in \mathbb{N}$. *Pak zúžení* T^n *na* $I_{n,k}$ *je lineární homeomorfismus na* $[0, 1]$.

b) *Množina periodických bodů zobrazení stan je hustá.*

Cvičení 1.46. Pomocí Věty o střední hodnotě dokažte následující tvrzení:

a) *Nechť* $I = [a, b]$ *je uzavřený interval a* $f : I \to I$ *je spojitá funkce. Pak* f *má alespoň jeden pevný bod v* I.

b) *Nechť* I *je uzavřený interval a* $f : I \to \mathbb{R}$ *je spojitá funkce. Jestliže* $f(I) \supset I$, *pak* f *má pevný bod v* I.

Cvičení 1.47. Dokažte, že každá orbita T_λ (viz příklad 1.4) je hustá v S^1, jestliže λ je iracionální číslo.

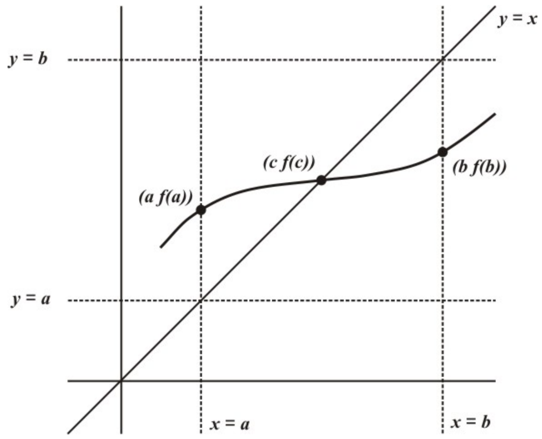
Řešení:

Cv: 1.46:

a) Nechť $f(a) = a$ nebo $f(b) = b$, pak buď a nebo b je pevný bod. Předpokládejme, že $f(a) \neq a$ a $f(b) \neq b$. Nechť $g(x) = f(x) - x$, $g(x)$ je spojitá funkce. Jelikož $f(a) \neq a$ a $f(a)$ je v intervalu $[a, b]$, $f(a) > a$. Podobně $f(b) < b$. Odtud $g(a) = f(a) - a > 0$ a $g(b) = f(b) - b < 0$. Protože g je spojitá, z Věty o střední hodnotě vyplývá, že existuje $c \in [a, b]$ tak, že $g(c) = f(c) - c = 0$, tedy $f(c) = c$.

b) Jestliže $I = [a, b]$ pak existují $c,\ d \in I$ tak, že $f(c) = a$ a $f(d) = b$. Z toho, že $f(c) \le c$, $f(d) \ge d$ a z Věty o střední hodnotě vyplývá, že existuje bod e mezi body $c,\ d$ takový, že $f(e) = e$.

Cv: 1.47: Nechť je dán úhel $\varphi \in S^1$. Každé dva body v orbitě φ jsou různé tj. pro každé $m \neq n \in \mathbb{Z}$, pak $T_\lambda^n(\varphi) \neq T_\lambda^m(\varphi)$. Kdyby platilo $T_\lambda^n(\varphi) = T_\lambda^m(\varphi)$ dostaneme $(n-m)\lambda = 0$, a proto $n = m$. Z toho, že každá nekonečná množina bodů na kružnici musí mít hromadný bod, vyplývá, že pro každé $\varepsilon > 0$, musí existovat celá čísla $n,\ m$, pro která



Obrázek 11. Znázornění situace a) z příkladu 1.46.

$|T_\lambda^n(\varphi) - T_\lambda^m(\varphi)| < \varepsilon$. Nechť $k = n - m$. Pak $\left|T_\lambda^k(\varphi) - \varphi\right| < \varepsilon$. Zobrazení T_λ zachovává délky na S^1. Proto T_λ^k zobrazuje úhel φ na $T_\lambda^k(\varphi)$ a dále na $T_\lambda^{2k}(\varphi)$, který má délku menší než ε. Zvláště pak vyplývá, že body φ, $T_\lambda^k(\varphi)$, $T_\lambda^{2k}(\varphi), \dots$ rozdělují S^1 na úhly délky menší než ε. Neboť ε je libovolné, orbita je hustá v S^1.

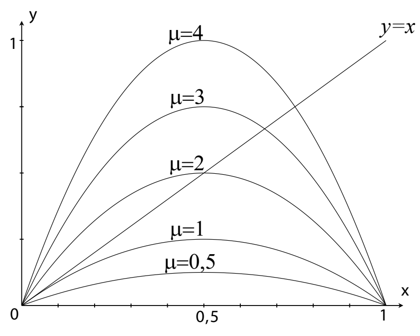
KAPITOLA 2

Kvadratický systém

V této části se budeme zabývat tzv. kvadratickým systémem funkcí. Jde o funkce tvaru $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$, kde $\mu > 0$. V tomto případě budeme mluvit o *logistické funkci*. Poznamenejme, že grafem F_μ je parabola, protínající osu x v bodech $x_1 = 0$ a $x_2 = 1$, s vrcholem v bodě $(1/2, \mu/4)$. Tyto funkce modelují některé jevy, např. v biologii či ekonomii.

Je zřejmé, že jestliže $0 < \mu \leq 4$, pak je F_μ spojitá funkce z intervalu $[0,1]$ do $[0,1]$. Proto se budeme věnovat převážně funkcím F_μ s těmito hodnotami μ. Ovšem okrajově nahlédneme i na případ, kdy $\mu > 4$, ale opět pouze na intervalu $[0,1]$. Jak se ukáže později, mimo tento interval není chování těchto funkcí nijak zvlášť zajímavé.

Grafické znázornění logistické funkce F_μ pro některé hodnoty μ:



OBRÁZEK 1

V celé této kapitole, aniž bychom na to upozorňovali, budeme předpokládat, že $\mu > 0$ a $I = [0,1]$.

2.1. Periodické body

TVRZENÍ 2.1. *Každá funkce F_μ má právě dva pevné body, a to 0 a $p_\mu = (\mu-1)/\mu$.*

DŮKAZ. Pevný bod funkce f je bod x_0 splňující $f(x_0) = x_0$, tedy musíme určit, pro která x je $F_\mu(x) = x$. Stačí vyřešit rovnici

$$\mu x(1-x) = x.$$

Jednoduchými úpravami ji převedeme na tvar

$$x(\mu - \mu x - 1) = 0,$$

a z tohoto vyjádření je už zřejmé, že jedinými pevnými body jsou 0 a $\mu - 1/\mu$. □

Následující dvě tvrzení lze jednoduše dokázat přímým výpočtem, proto je jejich důkaz přenechán jako cvičení.

Tvrzení 2.2. *Jestliže* $0 < \mu < 1$, *potom* $p_\mu < 0$ *je odpuzující pevný bod, zatímco* 0 *je přitahující pevný bod. Navíc*

(1) *pro* $x \in (p_\mu, 1 - p_\mu)$ *je* $\lim_{n\to\infty} F_\mu^n(x) = 0$,
(2) *pro* $x < p_\mu$ *a* $x > 1 - p_\mu$ *je* $\lim_{n\to\infty} F_\mu^n(x) = -\infty$,
(3) *pro* $x \in \{p_\mu, 1 - p_\mu\}$ *je* $\lim_{n\to\infty} F_\mu^n(x) = p_\mu$.

Tvrzení 2.3. *Jestliže* $\mu = 1$, *pak jediným pevným bodem je bod* 0. *Dále platí, že* $\lim_{n\to\infty} F_\mu^n(x) = 0$ *pro každé* $x \in I$, *pokud* $x \notin I$ *je* $\lim_{n\to\infty} F_\mu^n(x) = -\infty$.

Z předchozích dvou tvrzení plyne, že funkce F_μ má pro hodnoty $\mu \leq 1$ pouze pevné body a žádný jiný cyklus zde není.

Nyní se budeme soustředit na případ, kdy $\mu > 1$. Ukážeme, že se většina bodů chová vzhledem k iteraci F_μ opět velice "krotce". Konkrétněji, že všechny body, které neleží v intervalu I, se zobrazují postupným iterováním funkce F_μ do $-\infty$.

Tvrzení 2.4. *Předpokládejme, že* $\mu > 1$. *Jestliže je* $x \notin I$, *potom* $F_\mu^n(x) \to -\infty$ *pro* $n \to \infty$.

Důkaz. Jedinými pevnými body takového zobrazení jsou podle tvrzení 2.1 body 0 a $p_\mu \in I$. Vezměme $x < 0$. Potom $\mu x(1 - x) < x$, protože $\mu > 1$ a $x < 0$. Posloupnost $\{F_\mu^n(x)\}_{n=0}^\infty$ je tedy klesající a je shora ohraničená posloupností $\{-n\}_{n=0}^\infty$. Proto konverguje k $-\infty$. Jestliže je $x > 1$, pak $F_\mu(x) < 0$, proto také $F_\mu^n \to -\infty$. □

Tvrzení 2.5. *Nechť* $1 < \mu < 3$. *Potom*

(1) F_μ *má přitahující pevný bod* p_μ *a odpuzující pevný bod* 0,
(2) $\lim_{n\to\infty} F_\mu^n(x) = p_\mu$ *pro každé* $x \in (0, 1)$.

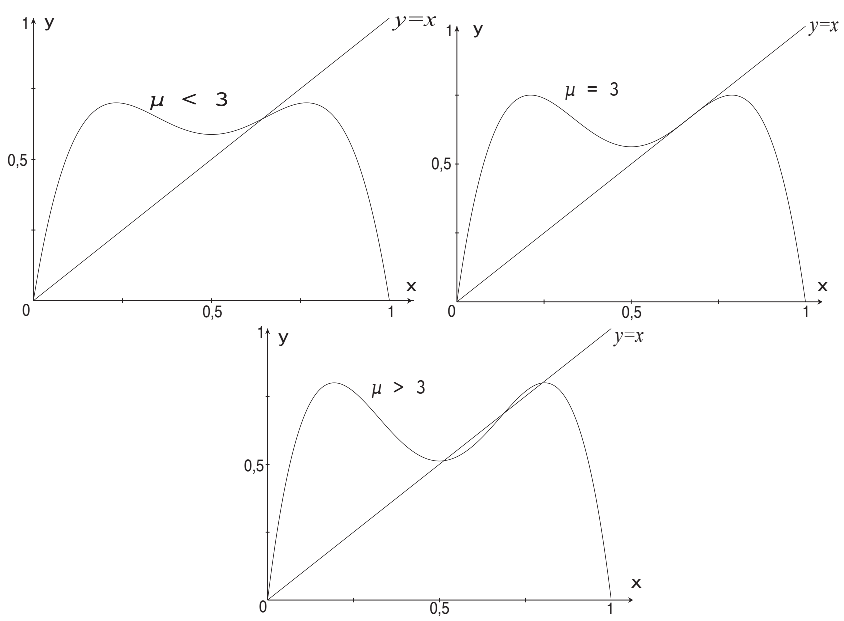
Důkaz. Aby platila první část tvrzení, musí být $|f'(p_\mu)| < 1$ a $|f'(0)| > 1$. Výpočty přenecháváme jako cvičení.

Důkaz druhé části rozdělíme na dva případy. Nejdříve nechť $1 < \mu < 2$. Potom podle první části tvrzení má F_μ odpuzující pevný bod 0 a přitahující pevný bod $p_\mu \in (0, 1/2)$. Proto pro $x \in (0, 1/2]$ platí $F_\mu^n(x) \to p_\mu$ pro $n \to \infty$. Pokud $x \in (1/2, 1)$, pak $F_\mu(x) \in (0, 1/2)$

a dále iterace konvergují k bodu p_μ stejně jako pro $x \in (0, 1/2]$. Nyní předpokládejme, že $2 < \mu < 3$. Bod p_μ v tomto případě leží v intervalu $(1/2, 1)$. Označme $\hat{p_\mu}$ bod z intervalu $(0, 1/2)$, jehož obraz při F_μ je p_μ. Lze snadno ukázat, že F_μ^2 zobrazí interval $[\hat{p_\mu}, p_\mu]$ dovnitř $[1/2, p_\mu]$. Z toho vyplývá, že $F_\mu^n(x) \to p_\mu$ pro $n \to \infty$ a $\forall x \in [\hat{p_\mu}, p_\mu]$. Nyní předpokládejme zbývající možnost $x < \hat{p_\mu}$. Z grafické analýzy vyplývá, že existuje $k > 0$ takové, že $F_\mu^k(x) \in [\hat{p_\mu}, p_\mu]$. Potom tedy $F_\mu^{k+n}(x) \to p_\mu$ pro $n \to \infty$ a tím pádem se interval $(p_\mu, 1)$ zobrazí na $(0, p_\mu)$, stejně jako v předchozím případě. A jelikož platí $(0, 1) = (0, \hat{p_\mu}) \cup [\hat{p_\mu}, p_\mu] \cup (p_\mu, 1)$, tvrzení je dokázáno. Případ $\mu = 2$ čtenář snadno dokáže sám. $\square$

Z předchozího Tvrzení 2.5 je zřejmé, že pro $1 < \mu < 3$, má funkce F_μ právě dva pevné body a všechny ostatní body z intervalu $(0, 1)$ jsou přitahovány k bodu p_μ. V takovém případě nemá tedy funkce F_μ žádné periodické body periody různé od 1.

Pro $\mu = 3$ je situace komplikovanější. Nemůžeme použít Větu 1.29, jako tomu bylo v důkazu Tvrzení 2.5, protože $F'_\mu(p_\mu) = -1$. Na Obrázku 2 je možné vidět grafy funkce F_μ^2 v případech, kdy $\mu < 3, \mu = 3$ a $\mu > 3$. Jestliže $\mu > 3$, objevují se dva nové pevné body funkce F_μ^2, což dokazuje existenci dvojcyklu funkce F_μ. Jestliže $\mu = 3$, jedinými periodickými body jsou pevné body 0 a p_μ. Bod 0 je odpuzující, zatímco p_μ je přitahující pevný bod. Přitažlivost bodu p_μ plyne z Věty 1.19 a 1.21.



OBRÁZEK 2. Graf zobrazení F_μ^2 pro různé hodnoty μ.

Nyní uvažujme, že $\mu \in (3, 4]$. V tomto případě je situace mnohem složitější. V intervalu I vždy existuje alespoň jeden cyklus druhého řádu, tzn. existují body $u, v \in (0, 1)$ takové, že $F_\mu(u) = v$ a $F_\mu(v) = u$, viz obrázek 3. Protože $F_\mu^2(u) = u$ a $F_\mu^2(v) = v$, u, v jsou pevnými body funkce F_μ^2 a můžeme je najít jako řešení rovnice $F_\mu^2(x) = x$, tj.

$$\mu\,(\mu x(1-x))\,(1-\mu x(1-x)) = x.$$

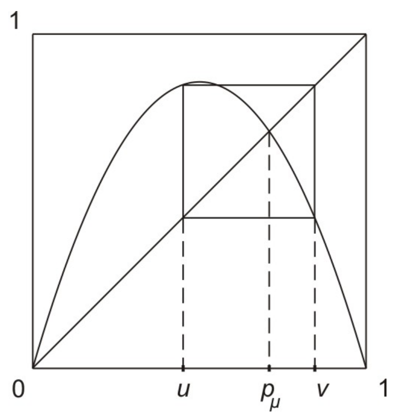
Po úpravě dostáváme

$$\mu^3x^4 - 2\mu^3x^3 + (\mu^3+\mu^2)x^2 - \mu^2x + x = 0,$$

a protože jsou oba pevné body 0 a p_μ funkce F_μ řešením této rovnice, můžeme obě strany této rovnice dělit polynomem $x\,(x-(1-\mu/\mu))$, čímž dostáváme rovnici

$$\mu^2x^2 - (\mu^2+\mu)x + (\mu+1) = 0. \tag{2.1}$$

Protože diskriminant této rovnice je pro $\mu > 3$ kladný, rovnice má dva kořeny. Tyto kořeny jsou pevnými body funkce F_μ^2 a tedy tvoří dvojcyklus funkce F_μ. Například pro $\mu = 3{,}4$ dostáváme cyklus řádu 2 v bodech $u = 0{,}451963\ldots$ a $v = 0{,}842154\ldots$.

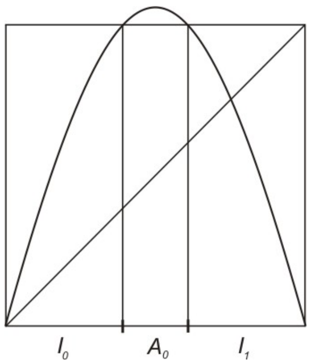


Obrázek 3. Dvojcyklus funkce F_μ pro $\mu = 3{,}4$.

Nakonec pro $\mu = 1+\sqrt{8} \doteq 3{,}8284\ldots$ se objevuje trojcyklus, a tedy pro $\mu \geq 1+\sqrt{8}$ má funkce F_μ cykly všech řádů, což plyne z Věty 1.19. Podobně jako v případě dvojcyklu najdeme pevné body trojcyklu jako řešení rovnice $F_\mu^3(x) = x$.

2.2. Logistická funkce F_μ pro $\mu > 4$

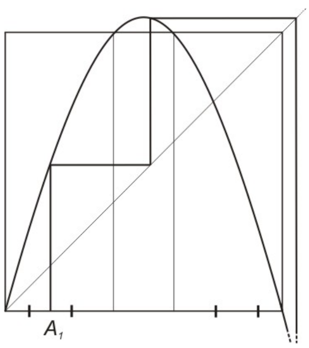
Připomeňme si, že maximum funkce $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ je v bodě $x = 1/2$, kde nabývá hodnoty $\mu/4$. Pro $\mu > 4$ dostáváme hodnotu větší než 1, a tedy $F_\mu(I) \supseteq I$. Z tohoto je zřejmé, že lze najít body v I, jejichž obraz leží mimo tento interval. Označme si množinu těchto bodů jako A_0 (viz Obrázek 4).



Obrázek 4

Z Obrázku 4 je patrné, že množina A_0 je otevřený interval se středem v 1/2. Navíc pro $x \in A_0$ platí, že $F_\mu^2(x) < 0$ a $\lim_{n\to\infty} F_\mu^n(x) = -\infty$.

Body z A_0 hned po první iteraci opustí interval I, zatímco všechny ostatní body z I zde po první iteraci zůstávají. Nyní si označme $A_1 = \{x \in I : F_\mu(x) \in A_0\}$. Pro body x z této množiny platí, že $F_\mu^2(x) > 1$, tedy $F_\mu^3(x) < 0$ a $\lim_{n\to\infty} F_\mu^n(x) = -\infty$ (viz Obrázek 5).



Obrázek 5

Induktivně můžeme definovat množinu A_n následujícím způsobem:

$$A_n = \{x \in I : F_\mu(x) \in A_{n-1}\} = \{x \in I : F_\mu^n(x) \in A_0\}.$$

Stejně jako v předchozích případech, i trajektorie bodů z množiny A_n, pro všechna $n \in \mathbb{N}$, konvergují k $-\infty$. Označíme-li si

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n,$$

pro každý bod $x \in A$ platí, že $\lim_{n\to\infty} F_\mu^n(x) = -\infty$.

Zbývá nám prozkoumat body mimo A, tedy množinu bodů, které postupným iterovám nikdy neopustí interval I. Označme si tuto množinu jako Λ, tzn.

$$\Lambda = I \setminus A = I \setminus \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \right).$$

Prvním krokem k popsání množiny Λ je následující tvrzení.

TVRZENÍ 2.6. *Nechť $\mu > 4$. Potom platí:*

(1) *pro každé $n \in \mathbb{N}$ je množina $I \setminus (A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_n)$ sjednocením 2^{n+1} uzavřených disjunktních intervalů, které budeme označovat I_α, kde $\alpha \in \{0,1\}^{n+1}$,*
(2) *jestliže $\alpha \in \{0,1\}^n$, pak je zobrazení $F_\mu^n : I_\alpha \to I$ bijekce.*

DŮKAZ. Naznačíme pouze ideu důkazu pro n = 0, 1. Jelikož A_0 je otevřený interval se středem v bodě $1/2$, $I \setminus A_0$ se skládá ze dvou disjunktních intervalů, které označíme I_0 a I_1 (viz Obrázek 4). Poznamenejme, že F_μ zobrazuje oba intervaly I_0 a I_1 monotónně na I, F_μ je rostoucí na intervalu I_0 a klesající na intervalu I_1. Jelikož $F_\mu(I_0) = F_\mu(I_1) = I$, pak je zobrazení F_μ bijektivní na intervalech I_0 a I_1. Dále existují dva otevřené intervaly, jeden v I_0, druhý v I_1, které jsou zobrazením F_μ zobrazeny do intervalu A_0. Tyto dva intervaly tvoří množinu A_1.

Nyní uvažujme $I \setminus (A_0 \cup A_1)$. Tato množina se skládá ze čtyř disjunktních intervalů a zobrazení F_μ zobrazuje každý z nich buď na I_0 nebo na I_1. Následně F_μ^2 zobrazuje každý z nich na I. Proto tedy každý ze čtyř intervalů v množině $I \setminus (A_0 \cup A_1)$ obsahuje otevřený podinterval, který se zobrazuje zobrazením F_μ^2 na A_0. Následně body z těchto intervalů "uniknou" z I při třetí iteraci. Množina takových bodů se označuje A_2. Důkaz se dokončí pomocí matematické indukce. □

DEFINICE 2.7. Nechť X je topologický prostor. Množina $Q \subset X$ se nazývá

(1) *řídká*, jestliže neobsahuje žádnou otevřenou množinu,
(2) *totálně nesouvislá*, jestliže každá souvislá komponenta obsahuje jediný bod,
(3) *perfektní*, jestliže je uzavřená a každý bod $x \in Q$ je hromadným bodem posloupnosti $\{x_n\} \subset Q$, kde $x_n \neq x$, (tzn. v Q neexistuje žádný izolovaný bod),

(4) *Cantorova množina*, jestliže je neprázdná, totálně nesouvislá, kompaktní a perfektní.

Je zřejmé, že pro $X = I$ je neprázdná množina $Q \subset I$ Cantorova, jestliže neobsahuje žádný otevřený interval, ani izolovaný bod a je uzavřená.

VĚTA 2.8. *Jesliže je $\mu > 4$, potom je*

$$\Lambda = \{x \in I : F_\mu^n(x) \in I \text{ pro všechna } n \in \mathbb{N}\}$$

Cantorova množina.

Důkaz uvedeme pouze pro $\mu > 2 + \sqrt{5}$, pro ostatní hodnoty parametru μ jej vypustíme pro jeho složitost.

DŮKAZ. Potřebujeme dokázat, že F_μ pro $\mu > 2 + \sqrt{5}$ je uzavřená, totálně nesouvislá a perfektní množina. Nejdříve dokážeme sporem, že Λ neobsahuje žádný interval. Předpokládejme tedy, že existuje interval $[y, z] \subset \Lambda$. Je snadné ověřit, že zvolené μ je dostatečně vysoké, aby $|F'_\mu(x)| > 1$ pro všechny body z $I_0 \cup I_1$. Potom tedy existuje $\lambda > 1$ takové, že $|F'_\mu(x)| > \lambda \quad \forall x \in \Lambda$. Z pravidla pro derivování složené funkce vyplývá, že potom také

$$|(F_\mu^n)'(x)| > \lambda^n. \tag{2.2}$$

Potom ale (2.2) platí také pro každý bod našeho intervalu $[y, z]$. Vyberme n takové, že $\lambda^n|z - y| > 1$. Z věty o střední hodnotě dostaneme

$$|F_\mu^n(z) - F_\mu^n(y)| \geq \lambda^n|z - y| > 1, \tag{2.3}$$

z čehož vyplývá, že buď $F_\mu^n(z)$, nebo $F_\mu^n(y)$ musí ležet mimo I a tím docházíme ke sporu. Λ je tedy totálně nesouvislá.

Uzavřenost vyplývá z toho, že Λ je podle tvrzení (2.6) sjednocením disjunktních uzavřených intervalů.

Zbývá dokázat, že Λ je perfektní, tedy že neobsahuje žádný izolovaný bod. Předpokládejme, že v ní existuje izolovaný bod p. Množina Λ je uzavřená, tzn. že v ní má každá konvergentní posloupnost svou limitu. Ke sporu nám zbývá dokázat, že pro každý bod najdeme v Λ posloupnost, která k němu konverguje. Bod p je z Λ, je tedy krajním bodem intervalu A_k pro nějaké k. Hledaná posloupnost bude posloupnost $\{a_i\}_{i=1}^\infty$, kde a_i je koncový bod intervalu A_i blíže k p pro $i \leq k$ a $a_i = p$ pro $i > k$. $\square$

2.3. Cvičení

Cvičení 2.9. Zjistěte, pro který parametr μ má funkce F_μ přitahující dvojcyklus (resp. trojcyklus).

Cvičení 2.10. Nechť (X, f) a (Y, g) jsou topologické prostory. Pak funkce f je *topologicky konjugovaná* s g, jestliže existuje homeomorfismus $h\colon X \to Y$ takový, že $h \circ f = g \circ h$. V tomto případě se h nazývá *topologická konjugace* .
Topologickou konjugaci můžeme reprezentovat komutujícím diagramem:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & X \arrow[d, "h"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

Dokažte, že logistická funkce $F_4\colon [0,1] \to [0,1]$ je topologicky konjugovaná se zobrazením tent $T\colon [0,1] \to [0,1]$ (viz Cvičení 1.44) zobrazením $h(x) = \sin^2(\pi/2\, x)$.

Cvičení 2.11. Dokažte, že zobrazení $F\colon \triangle \to \triangle$ (viz Příklad 1.6) je topologicky konjugované se zobrazením $G\colon D \to D$, kde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$ topologickou konjugací $h : \triangle \to D$ definovanou předpisem $(x, y) \mapsto ((x-2)\sqrt{x(4-x-y)}, x(4-x-y)-2)$.

Cvičení 2.12. Dokažte Tvrzení 2.2 a 2.3.

KAPITOLA 3

Symbolická dynamika

Symbolická dynamika je užitečnou metodou při studiu diskrétních dynamických systémů, jako je např. kvadratické zobrazení Cantorovy množiny. Její základní myšlenkou je vytvoření systému z prostoru všech nekonečných posloupností abstraktních symbolů, kde každý symbol vyjadřuje stav systému a zobrazení *posun* zajišťuje dynamiku.

Jako symboly budeme používat přirozená čísla mezi 0 a $n-1$. V případě $n = 2$ můžeme místo čísel 0, 1 používat písmena L a R (Left, Right).

Definice 3.1. Prostor $\Sigma_n = \{s = (s_0 s_1 s_2 ...) | s_i \subset \{0, 1, \ldots, n-1\}\}$ se nazývá *prostor n-posunu.*

Na tomto prostoru lze zavést metriku následujícím způsobem. Vzdálenost mezi dvěma jeho prvky s, t (nekonečné posloupnosti symbolů) definujeme jako

$$d(s,t) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\delta(s_i, t_i)}{n^i},$$

kde $\delta(s_i, t_i) = 0$, když $s_i = t_i$ a $\delta(s_i, t_i) = 1$ v jiném případě. Tato vzdálenost je shora omezená řadou

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n^i},$$

kde $n \geq 2$ a proto konverguje. Lze snadno dokázat následující vlastnosti:

Lemma 3.2.
- *d tvoří metriku na prostoru Σ_n.*
- *Metrický prostor (Σ_n, d) je kompaktní.*

Příklad 3.3. Určeme vzdálenost posloupností $a = \overline{001} = 001\,001...$ a $b = \overline{01} = 01\ 01\ 01...$ z prostoru Σ_2.
Snadno vidíme, že $\delta(a_i, b_i)$ jsou postupně $0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, ...$ pro $i = 0, 1, 2, 3, ...$ Vzdálenost je tedy

$$\frac{0}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{0}{16} + \frac{0}{32} + \frac{0}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + \frac{0}{1024} + ... \,.$$

Tento součet můžeme vyjádřit geometrickou řadou

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{64^i},$$

jejíž součet je 56/63.

Věta 3.4. *Nechť $s, t \in \Sigma_n$. Potom $s_i = t_i$ pro $i \leq k$ právě tehdy, když $d(s,t) \leq 1/n^k$.*

Důkaz. Předpokládejme, že $s_i = t_i$ pro $i \leq k$. Pak platí

$$d(s,t) \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^i} \leq \frac{1}{n^k},$$

protože $n \geq 2$.
Důkaz opačné implikace provedeme sporem. Předpokládejme, že pro nějaké $i \leq k$ platí $s_i \neq t_i$. Potom ale

$$d(s,t) \geq \frac{1}{n^i} \geq \frac{1}{n^k},$$

což je spor s předpokladem. □

Nyní, když máme na prostoru Σ_n metriku, můžeme její pomocí zavést topologii a určit, které množiny jsou v tomto prostoru otevřené a které uzavřené.

Definice 3.5. Podmnožina $C_{s_0 s_1 \ldots s_k} = \{t \in \Sigma_n | t_i = s_i \text{ pro } i \leq k\}$ se nazývá *cylindr posloupnosti s.*

Následující věta ukazuje, jak tyto cylindry souvisí s topologií.

Věta 3.6. *Množina $\Gamma(s)$ všech cylindrů posloupnosti s tvoří bázi okolí s.*

Důkaz jednoduše vyplývá z faktu, že všechna okolí s v topologii generované metrikou se skládají z otevřených koulí $B_r(s)$ a také z toho, že

$$C_{s_0 s_1 \ldots s_k} = B_{1/n^k}(s).$$

Věta 3.7. *Cylindr je otevřená a zároveň uzavřená množina v topologii generované metrikou d.*

Důkaz. Tvrzení, že cylindr je otevřená množina, vyplývá z předchozího tvrzení. Zbývá tedy dokázat, že je také uzavřená množina, tzn. že jeho doplněk je otevřený. Doplněk cylindru $C_{s_0 s_1 \ldots s_k}$ je množina tvaru

$$\Sigma_n \setminus C_{s_0 s_1 \ldots s_k} = \{t \in \Sigma_n | \exists i \leq k : t_i \neq s_i\}.$$

Vezmeme libovolný prvek $t \in \Sigma_n \setminus C_{s_0 s_1 \dots s_k}$. Cylindr $C_{t_0 t_1 \dots t_k}$ je podmnožinou našeho doplňku a je to otevřená koule. Množinu $\Sigma_n \setminus C_{s_0 s_1 \dots s_k}$ můžeme takto rozdělit na konečné sjednocení otevřených koulí a proto je prvkem topologie. Cylindr $C_{s_0 s_1 \dots s_k}$ je tedy uzavřená množina. $\square$

Když máme topologii, můžeme se začít zabývat spojitými zobrazeními. Tím nejdůležitějším je v symbolické dynamice zobrazení "posun".

Definice 3.8. Zobrazení *posun* $\sigma : \Sigma_n \longrightarrow \Sigma_n$ je definováno předpisem $\sigma(s_0 s_1 s_2 \dots) = (s_1 s_2 \dots)$

Zobrazení posun má řadu zajímavých vlastností. Uvedeme a dokážeme některé z nich.

Věta 3.9. *Posun σ je spojité zobrazení.*

Důkaz. Nechť $y = \sigma(x)$. Chceme dokázat, že pro každé okolí $V \in \Gamma(y)$ bodu y existuje okolí $U \in \Gamma(x)$ bodu x takové, že $\sigma(U) \subset V$. Z definice zobrazení σ máme

$$V = C_{\sigma(s)_0 \sigma(s)_1 \dots \sigma(s)_k} = C_{s_1 s_2 \dots s_{k-1}}$$

Položme

$$U := C_{s_0 s_1 s_2 \dots s_k}.$$

Potom

$$\sigma(U) = \sigma(C_{s_0 s_1 s_2 \dots s_k}) = C_{s_1 s_2 \dots s_{k-1}} = V \subset V,$$

čímž je tvrzení dokázáno. $\square$

Věta 3.10. *Kardinalita (mohutnost) množiny* $\mathrm{Per}_k(\sigma)$ *je* n^k.

Důkaz. Všechny periodické posloupnosti periody k musí být ve tvaru $s = (s_0 s_1 \dots s_{k-1} s_0 s_1 \dots s_{k-1} \dots)$ a počet všech permutací s opakováním n prvků o délce k je n^k. $\square$

Věta 3.11. *Množina* $\mathrm{Per}(\sigma)$ *je hustá v prostoru* Σ_n.

Důkaz. Množina je hustá, pokud její uzávěr je celý prostor. To znamená, že pro libovolný bod z prostoru Σ_n musíme najít posloupnost periodických bodů, která k tomuto bodu konverguje.

Nechť $s = (s_0 s_1 s_2 \dots) \in \Sigma_n$. Definujme

$$s_k := (s_0 s_1 \dots s_{k-1} s_0 s_1 \dots s_{k-1} \dots).$$

Je zřejmé, že $s_k \in \mathrm{Per}_k(\sigma)$ a $s_k \to s$ pro $k \to \infty$. $\square$

VĚTA 3.12. *Zobrazení σ má v prostoru Σ_n bod s hustou orbitou.*

DŮKAZ. Pro zjednodušení položme $n = 2$. Důkaz pro libovolné n je analogický.

Chceme najít posloupnost čísel 0 a 1, která má hustou orbitu. Nechť

$$s^* := (\underbrace{0|1}_{\text{bloky o délce 1}} \quad \underbrace{00|01|10|11}_{\text{bloky o délce 2}} \; \underbrace{000|001|010|011|100|101|110|111}_{\text{bloky o délce 3}} \ldots).$$

Pokud má tento bod hustou orbitu, musí existovat posloupnost jeho iterací, která konverguje k libovolnému prvku prostoru Σ_n. Tvrzení pak plyne z faktu, že v této posloupnosti s^* můžeme vždy najít blok, který odpovídá libovolné posloupnosti o libovolné délce. □

Posloupnost s^* je prvkem Σ_2, který má vzhledem k posunu nespočetnou ω limitní množinu, kterou je celý prostor Σ_2. Zbývá nalézt posloupnosti ze Σ_2, které mají ω limitní množinu buď konečnou, nebo spočetnou nekonečnou.

PŘÍKLAD 3.13. Najděme posloupnost x_1, resp. x_2 ze Σ_2 tak, že $\omega_\sigma(x_1)$ je konečná a $\omega_\sigma(x_2)$ je spočetná nekonečná.
Za x_1 můžeme vzít např. libovolnou periodickou posloupnost s periodou k. Její ω limitní množina je konečná a obsahuje právě k prvků. Položme třeba $x_1 = \overline{101}$. Potom

$$\omega_\sigma(x_1) = \{\overline{101}, \overline{011}, \overline{110}\}.$$

Nyní zkonstruujeme posloupnost, jejíž ω limitní množina je nekonečná spočetná. Položme

$$x_2 = 10\ 100\ 1000\ 10000\ 100000\ldots.$$

Zde platí

$$\omega_\sigma(x_2) = \{\overline{0}\} \cup \{\underbrace{00\ldots0}_{k}1\overline{0}\ |k = 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Dalším pojmem, kterým se budeme v této kapitole zabývat je *podposun konečného typu.* Nechť A je čtvercová matice typu $n \times n$ s prvky z množiny $\{0, 1\}$. Prvek matice A na $i-$tém řádku a $j-$tém sloupci značíme $a_i a_j$. Takovouto matici nazýváme *maticí posunu* pro systém Σ_n s posunem. Pomocí matice A definujeme podmnožinu Σ_A prostoru Σ_n.

DEFINICE 3.14. $\Sigma_A := \{s = (s_0 s_1 s_2 \ldots) \in \Sigma_n | a_{s_i+1} a_{s_{i+1}+1} = 1 \ \ \forall i\}$.

V definici je podmínka $a_{s_i+1} a_{s_{i+1}+1} = 1$, protože posloupnosti v prostoru Σ_n se skládají z čísel $0, \ldots, n-1$, ale počet řádků nebo sloupců matice počítáme od jedné. (Pokud bychom posloupnosti ze Σ_n poskládali z čísel $1, \ldots, n$, pak by podmínka v definici zněla $a_{s_i} a_{s_i+1} = 1$.) Posloupnost x tedy patří do množiny Σ_A, pokud všechny prvky v matici A na pozicích $x_{i+1} x_{i+2}$ jsou jedničky pro všechna i.

Příklad 3.15. Vezměme matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Na pozicích a_1a_1 a a_2a_2 jsou jedničky, proto v posloupnostech prostoru $\Sigma_A \subset \Sigma_n$ mohou být nuly následovány nulami a jedničky jedničkami. Naopak na pozicích a_1a_2 a a_2a_1 jsou v matici A nuly, proto v prostoru Σ_A nesmí být žádná posloupnost, ve které by za jedničkou následovala nula, nebo za nulou jednička. Tudíž $\Sigma_A = \{\overline{0}, \overline{1}\}$.

Příklad 3.16. Nechť $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Jediná nula v této matici je na pozici a_2a_1, proto v posloupnostech z Σ_A mohou být libovolné kombinace nul a jedniček, ale za jedničkou nesmí být nikdy nula.

Symbolem σ_A značíme zúžení posunu na množinu Σ_A. Aby toto zúžení bylo korektně definováno, musíme dokázat následující tvrzení.

Tvrzení 3.17. *Nechť A je matice posunu typu $n \times n$. Potom Σ_A je uzavřená podmnožina prostoru Σ_n a je invariantní vzhledem k σ_A.*

Důkaz. Množina Σ_A je invariantní vzhledem k zobrazení σ_A, když platí $\sigma_A(\Sigma_A) \subseteq \Sigma_A$, což je zřejmě splněno.
Zbývá dokázat, že Σ_A je uzavřená. Množina je uzavřená, když s každou konvergentní posloupností svých prvků obsahuje i její limitu. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že existuje posloupnost $\{s_i\}_{i=1}^{\infty}$ bodů ze Σ_A, která konverguje k $t \notin \Sigma_A$. Nechť α je nejmenší číslo splňující podmínku $a_{t_\alpha+1}a_{t_{\alpha+1}+1} = 0$. Jelikož $\{s_i\}$ konverguje k t, pak existuje přirozené číslo k takové, že když $i > k$, pak $d(s,t) < 1/n^{\alpha+1}$. Potom ale podle věty 3.4, jelikož $s_i \in \Sigma_A$, musí platit $a_{t_\alpha+1}a_{t_{\alpha+1}+1} = 1$, což je spor. □

Definice 3.18. Je-li zobrazení σ_A určeno konečně mnoha podmínkami danými maticí A, pak jej nazýváme *podposun konečného typu.*

Připomeňme, že $Tr(A) := \sum_{i=0}^{n-1} a_{ii}$ se nazývá *stopa matice A*.

Lemma 3.19. *Buď A matice posunu typu $(n-1) \times (n-1)$. Pak platí*

$$\#\mathrm{Per}_k \sigma_A = Tr(A^k).$$

Důkaz. Vezměme bod s ze Σ_A. Tento bod patří do množiny $\mathrm{Fix}(\sigma^k)$ právě tehdy, když je ve tvaru $s = (i_0 i_1 \dots i_{k-1} i_0 i_1 \dots i_{k-1} \dots)$. Jelikož bod s patří do prostoru Σ_A, pro prvky matice A musí platit

$$a_{i_0+1}a_{i_1+1} = a_{i_1+1}a_{i_2+1} = a_{i_2+1}a_{i_3+1} = \dots = a_{i_{k-1}+1}a_{i_0+1} = 1.$$

Z toho vyplývá

$$a_{i_0+1}a_{i_1+1} \cdot a_{i_1+1}a_{i_2+1} \cdot a_{i_2+1}a_{i_3+1} \cdot \dots \cdot a_{i_{k-1}+1}a_{i_0+1} = 1.$$

Potom tedy platí

$$\sum_{i_0+1, i_1+1, \ldots, i_{k-1}+1} a_{i_0+1} a_{i_1+1} \cdot a_{i_1+1} a_{i_2+1} \cdot \cdots \cdot a_{i_{k-1}+1} a_{i_0+1} = \#\mathrm{Per}_k \sigma_A,$$

kde součet bereme přes všechny možné kombinace prvků $i_0+1, \ldots, i_{k-1}+1$. Tento součet se ale také rovná stopě matice A^k, což přenecháváme čtenáři jako cvičení. $\square$

PŘÍKLAD 3.20. Pomocí lemmatu (3.19) spočítáme počet prvků množin $\mathrm{Per}_3\sigma_A$ a $\mathrm{Per}_4\sigma_A$, je-li $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Lze snadno spočítat, že

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, Tr(A^2) = 3,$

$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, Tr(A^3) = 4$ a

$A^4 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, Tr(A^4) = 7.$

Trojcykly jsou tedy v Σ_A 4 a čtyřcyklů je zde 7.

TVRZENÍ 3.21. *Prostor Σ_2 je homeomorfní s libovolnou Cantorovou množinou.*

DŮKAZ. Vezměme libovolnou Cantorovu množinu Λ a v ní dva různé body a_0, a_1. Jelikož Λ je totálně nesouvislá, můžeme najít okolí G_0 a G_1 bodů a_0, a_1 takové, že $a_0 \in G_0, a_1 \in G_1, G_0 \cap G_1 = \emptyset$ a $G_0 \cup G_1 \supset \Lambda$. Označme $A_0 := \Lambda \setminus G_1$ a $A_1 := \Lambda \setminus G_0$. Množiny A_0, A_1 jsou uzavřené, protože Λ je uzavřená a G_0, G_1 jsou otevřené. Navíc platí $A_0 \cap A_1 = \emptyset$ a $A_0 \cup A_1 = \Lambda$.
Dále postupujeme analogicky. Najdeme body $a_{00} \neq a_{01}$ z A_0 a body a_{10}, a_{11} z A_1. Stejným způsobem vytvoříme množiny A_{00}, A_{01}, A_{10} a A_{11}. V dělení pokračujeme tak, že $A_{\alpha_{n+1}} \subset A_{\alpha_n}$, kde $\alpha_n \in \{0,1\}^n$. Proto *diam* $A_{\alpha_n} \to 0$ pro $n \to \infty$. Každou množinu A_α, kde $\alpha \in \{0,1\}^\infty$ tedy tvoří jediný bod. Označme jej a_α. Hledaný homeomorfismus bude $\varphi : \Lambda \to \Sigma_2$ daný předpisem $\varphi(a_\alpha) \to \alpha$. $\square$

3.1. Zobrazení posun a F_μ

Vraťme se nyní ke Kapitole 2 a používejme tam zavedenou symboliku. Budeme zkoumat vlastnosti zobrazení F_μ na množině Λ pomocí zobrazení posunu na Σ_2.

DEFINICE 3.22. *Itinerářem* bodu $x \in I$ rozumíme posloupnost $S(x) = s_0 s_1 s_2 \cdots \in \Sigma_2$ takovou, že $s_j = 0$, je-li $F_\mu^j(x) \in I_0$, a $s_j = 1$, je-li $F_\mu^j(x) \in I_1$, pro každé j.

VĚTA 3.23. *Je-li $\mu > 2+\sqrt{5}$, pak $S : \Lambda \to \Sigma_2$ je homeomorfizmus.*

DŮKAZ. Důkaz injektivnosti zobrazení S provedeme sporem. Předpokládejme, že v Λ existují dva body $x \neq y$ takové, že $S(x) = S(y)$. Potom ale $F_\mu^n(x)$ i $F_\mu^n(y)$ leží pro každé n ve stejné polovině (I_0 nebo I_1) množiny Λ. Zobrazení F_μ je tedy na intervalu $[F_\mu^n(x), F_\mu^n(y)]$ monotónní. Potom všechny body z tohoto intervalu zůstávají ve sjednocení $I_0 \cup I_1$ a to je spor s faktem, že Λ je totálně nesouvislá.
Nyní dokážeme, že S je surjektivní. Buď J uzavřený interval v I. Označme

$$F_\mu^{-n}(J) = \{x \in I | F_\mu^n(x) \in J\}.$$

Tato množina je vzorem množiny J při S. Pokud $J \subset I$ je uzavřený interval, pak $F_\mu^{-1}(J)$ se skládá ze dvou podintervalů, z nichž jeden leží v I_0 a druhý v I_1. Vezmeme posloupnost $s = s_0s_1s_2\ldots$. Musíme dokázat, že pro každé $x \in \Lambda$ platí $S(x) = s$. Definujme množinu

$$\begin{aligned} I_{s_0s_1\ldots s_n} &= \{x \in I | x \in I_{s_0}, F_\mu(x) \in I_{s_1}, \ldots, F_\mu^n(x) \in I_{s_n}\} \\ &= I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1}) \cap \cdots \cap F_\mu^{-n}(I_{s_n}). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Tvrdíme, že $I_{s_0\ldots s_n}$ tvoří pro $n \to \infty$ posloupnost do sebe vnořených neprázdných uzavřených intervalů. Platí

$$I_{s_0s_1\ldots s_n} = I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1\ldots s_n}),$$

takže indukcí dostáváme, že $I_{s_1\ldots s_n}$ je neprázdný podinterval takový, že $F_\mu^{-1}(I_{s_1\ldots s_n})$ se skládá ze dvou uzavřených intervalů, z nichž jeden leží v I_0 a druhý v I_1. Interval $I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1\ldots s_n})$ je tedy uzavřený. Tyto intervaly jsou do sebe vnořené, protože

$$I_{s_0\ldots s_n} = I_{s_0\ldots s_{n-1}} \cap F_\mu^{-n}(I_{s_n}) \subset I_{s_0\ldots s_{n-1}}.$$

Víme tedy, že průnik

$$\bigcap_{n\geq 0} I_{s_0\ldots s_n} \tag{3.2}$$

je neprázdný. Dále také platí, že pokud bod x leží v tomto průniku, pak leží v intervalu I_{s_0} a jeho obraz $F_\mu(x)$ leží v I_{s_1}, atd. Proto $S(x) = (s_0s_1\ldots)$. Průnik (3.2) tvoří jediný bod, takže S je bijekce.
Nakonec zbývá dokázat spojitost S. Vyberme si prvek $x \in \Lambda$ a předpokládejme, že $S(x) = s_0s_1\ldots$. Mějme $\varepsilon > 0$ a n takové, že $1/2^n < \varepsilon$. Stejně jako v předchozí části důkazu vytvoříme pro všechny možné kombinace $t_0t_1\ldots t_n$ podintervaly $I_{t_0t_1\ldots t_n}$. Tyto intervaly jsou navzájem disjunktní a Λ je jejich sjednocením. Takových intervalů je 2^{n+1}. Jeden z nich je $I_{s_0\ldots s_n}$. Takže můžeme vybrat δ takové, že když $|x-y| < \delta$ a $y \in \Lambda$, pak $y \in I_{s_0\ldots s_n}$. Proto v prvních $n+1$ výrazech platí $S(x) = S(y)$. Potom, podle věty (3.4),

$$d(S(x), S(y)) < 1/2^n < \varepsilon.$$

Zbývá dokázat, že inverze S^{-1} je také spojitá. Tuto jednoduchou část přenecháváme jako cvičení. $\square$

Následující Věta ukazuje, že množiny Λ a Σ_2 jsou z dynamického pohledu identické. Můžeme tedy nalézt tytéž dynamické vlastnosti pro obě zobrazení F_μ a σ.

VĚTA 3.24. $S \circ F_\mu = \sigma \circ S$.

DŮKAZ. Stejně jako v důkazu předchozí věty můžeme každý bod $x \in \Lambda$ vyjádřit jako průnik vnořených intervalů

$$\bigcap_{n\geq 0} I_{s_0 s_1 \dots s_n}$$

určených itinerářem $S(x)$. Víme, že platí rovnost 3.1. Potom $F_\mu(I_{s_0\dots s_n})$ můžeme zapsat ve tvaru

$$I_{s_1} \cap F\mu^{-1}(I_{s_2}) \cap \dots \cap F_\mu^{-n+1}(I_{s_n}) = I_{s_1\dots s_n},$$

jelikož $F_\mu(I_{s_0}) = I$. Potom

$$\begin{aligned} S(F_\mu(x)) &= S\left(F_\mu\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 s_1 \dots s_n}\right)\right) \\ &= S\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} I_{s_1 \dots s_n}\right) \\ &= s_1 s_2 \dots = \sigma(S(x)). \end{aligned}$$

$\square$

POZNÁMKA 3.25. Z věty 3.24 vyplývá, že zobrazení F_μ a σ jsou topologicky konjugovaná. O této vlastnosti se píše v kapitole 2 - Kvadratický systém.

3.2. Cvičení

CVIČENÍ 3.26. Jsou dány prvky $s, r, t \in \Sigma_2$:

$$\begin{aligned} s &= \overline{001}, \\ r &= \overline{01}, \\ t &= \overline{10}. \end{aligned}$$

Určete vzdálenosti $d(t, r)$ a $d(s, r)$.

CVIČENÍ 3.27. Pomocí projekcí na $i-$tou souřadnici dokažte, že cylindr je otevřená a zároveň uzavřená množina. (Na množině symbolů uvažujeme diskrétní topologii.)

Cvičení 3.28. Dokažte, že d tvoří metriku na prostoru Σ_n.

Cvičení 3.29. Dokažte, že metrický prostor (Σ_n, d) je kompaktní.

Cvičení 3.30. Dokažte spojitost posunu pomocí $\varepsilon - \delta$ definice. (Použijte větu 3.4)

KAPITOLA 4

Topologická dynamika

V této kapitole se budeme zabývat topologickými vlastnostmi diskrétních dynamických systémů. Zejména omega limitními množinami, rekurencí, minimalitou a tranzitivitou.

4.1. Omega limitní množina

S definicí omega limitní množiny jsme se již setkali v Kapitole 1, proto připomeňme, že pro (X, f), kde X je kompaktní metrický prostor a f je spojité, definujeme

$$\omega_f(x) = \{y \in X : \exists n_i \nearrow \infty \wedge f^{n_i}(x) \to y\}$$

nebo také $\omega_f(x) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{f^k(x) : k > n\}}$.

Lemma 4.1. *Buďte $f \in C(X)$ a $x \in X$, pak*

(1) $\omega_f(x) \neq \emptyset$,
(2) $\omega_f(x)$ *je uzavřená množina,*
(3) $\omega_f(x) = f(\omega_f(x))$.

Důkaz.

(1) Neprázdnost automaticky plyne z kompaktnosti X.
(2) Označme y_k libovolnou posloupnost z $\omega_f(x)$ takovou, že $y_k \to y \in X$ pro $k \geq 1$. Chceme ukázat, že také $y \in \omega_f(x)$. Pro každé $j \geq 1$ vyberme k_j takové, že $d(y_{k_j}, y) < 1/2j$. Nyní vezmeme n_j takové, že $d(f^{n^j}(x), y_{k_j}) < 1/2j$ a $n_j < n_{j+1}$. Pak $d(f^{n^j}(x), y) < 1/j$ a $y \in \omega_f(x)$.
(3) Zřejmě platí $\omega_f(x) \supset f(\omega_f(x))$. Opačně předpokládejme, že $y \in \omega_f(x)$ a $f^{n_i}(x) \to y$. Pak $\{f^{n_i-1}(x)\}$ má konvergentní podposloupnost, tedy $f^{n_{i_j}-1}(x) \to z \in X$. Pak ale $f^{n_{i_j}}(x) \to f(z)$ a $f(z) = y$. Tedy $z \in \omega_f(x)$ a $\omega_f(x) = f(\omega_f(x))$.

□

Věta 4.2 ([**5**]). *Každá spočetná omega limitní množina obsahuje cyklus.*

Důkaz. Buď W_0 spočetná omega limitní množina. W_0 obsahuje izolovaný bod x_1. Kdyby W_0 neobsahovala izolovaný bod, byla by W_0 perfektní a tedy nespočetná. Položme $W_1 = \omega_f(x_1)$, zřejmě $W_1 \subset W_0$.

Můžeme tedy definovat transfinitní posloupnost W_β. Pak $\bigcap_{\alpha<\beta} W_\beta$ obsahuje cyklus. $\square$

PŘÍKLAD 4.3. Omega limitní množiny mohou být konečné, spočetné nekonečné i nespočetné. V prvním případě se jedná o cyklus. Spočetná nekonečná omega limitní množina byla konstruována v Příkladu 3.13. Pro příklad nespočetné omega limitní množiny poslouží (opět) zobrazení posun a bod s hustou orbitou, viz Lemma 3.11.

Zkoumejme nyní vlastnosti omega limitních množin pro topologicky konjugovaná zobrazení definovaných ve cvičeních Kapitoly 2.

VĚTA 4.4. *Buď $f \in C(X)$ topologicky konjugované s $g \in C(Y)$ a buď h jejich topologická konjugace. Pak $h(\omega_f(x)) = \omega_g(h(x))$.*

DŮKAZ. Označme A' množinu všech hromadných bodů množiny A. Pak $\omega_g(h(x)) = \omega_{h\circ f\circ h^{-1}}(h(x)) = (\{(h\circ f\circ h^{-1})^n(h(x))\}_{n=0}^\infty)' = (\{(h\circ f)^n(x)\}_{n=0}^\infty)' = h(\{(f)^n(x)\}_{n=0}^\infty)' = h(\omega_f(x))$. $\square$

4.2. Rekurence a minimalita

DEFINICE 4.5. Bod $x \in X$ je *rekurentní* pro zobrazení f, jestliže pro každé otevřené okolí U bodu x existuje $n \geq 1$ takové, že $f^n(x) \in U$. Množinu všech rekurentních bodů zobrazení f označujme $\mathrm{Rec}(f)$.

Poznamenejme, že stejně jako v případě omega limitní množiny lze rekurentní bod definovat ekvivalentně následujícím způsobem:

$$\exists n_k \nearrow \infty : f^{n_k}(x) \to x \tag{4.1}$$

VĚTA 4.6. *Pro $f \in C(X)$ platí:*
(1) $x \in \mathrm{Rec}(f) \iff x \in \omega_f(x)$,
(2) $\mathrm{Rec}(f) \neq \emptyset$.

DŮKAZ.
(1) Tvrzení plyne z (4.1) a definice omega limitní množiny.
(2) Buď $\mathcal{F}$ systém všech neprázdných, uzavřených podmnožin $Y \subset X$ takových, že $f(Y) \subset Y$. Systém $\mathcal{F}$ je zřejmě neprázdný, uspořádejme jej operací "$\subset$". Podle Zornova Lemmatu má $\mathcal{F}$ minimální prvek Y_0. Ukážeme, že každý bod $x \in Y_0$ je rekurentní. Protože Y_0 je uzavřená a invariantní vůči f, platí $\overline{\mathrm{Orb}_f^+(x)} \subset Y_0$. Množina $\overline{\mathrm{Orb}_f^+(x)}$ je také uzavřená a invariantní. Z minimality Y_0 pak máme $Y_0 = Y$. Což znamená, že každé okolí bodu x obsahuje nějaké $f^n(x)$ pro $n \geq 1$. Celkově tedy $\mathrm{Rec}(f) \neq \emptyset$. (Důkaz lze provést bez užití Zornova Lemmatu, viz [**8**].)

$\square$

Příklad 4.7. Jako příklad rekurentního bodu poslouží libovolný periodický či téměř periodický bod. Netriviálním příkladem poslouží posloupnost na prostoru posloupností z Lemmatu 3.11, jehož orbita je hustá. Konstrukce speciálních rekurentních bodů je popsána v příkladu 4.14.

Definice 4.8. Množina $M \subset X$ je *minimální* pro zobrazení f, jestliže je

(1) neprázdná a uzavřená,
(2) invariantní
(3) žádná vlastní podmnožina nemá předchozí dvě vlastnosti.

Lemma 4.9. *Neprázdná množina M je minimální právě tehdy, když pro každé $x \in M$ je $\omega_f(x) = M$.*

Důkaz. Je-li M minimální, pak pro každé $x \in M$ je $\omega_f(x)$ neprázdná, uzavřená a invariantní (viz Lemma 4.1). Tedy $M = \omega_f(x)$.

Opačně, je-li $\omega_f(x) = M$ pro každé $x \in M$, pak M je neprázdná, uzavřená a invariantní (viz Lemma 4.1). Předpokládejme, že existuje neprázdná, uzavřená a invariantní množina $N \subset M$. Je-li $y \in N$, pak $M = \omega_f(y) \subseteq N$ a $M = N$. □

Věta 4.10. *Buď f homeomorfizmus na X. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(1) *f je minimální,*
(2) *jediné uzavřené podmnožiny $E \subset X$ s vlastností $f(E) = E$ jsou $\emptyset$ a X,*
(3) *pro každou neprázdnou otevřenou množinu $U \subset X$, platí* $\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} f^n(U) = X$.

Důkaz. Dokažme následující implikace:

1. $\Rightarrow$ 2. Přepokládejme, že f je minimální, $E \neq \emptyset$ je uzavřená a $f(E) = E$. Je-li $x \in E$, pak $\mathrm{Orb}_f^+(x) \subset E$ a $X = \overline{\mathrm{Orb}_f^+(x)} \subset E$, tedy $X = E$.

2. $\Rightarrow$ 3. Je-li U neprázdná a otevřená, pak $E = X \setminus \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} f^n(U)$, je uzavřená a $f(E) = E$. Jelikož $E \neq X$, je nutně $E = \emptyset$.

3. $\Rightarrow$ 1. Buď $x \in X$ a U neprázdná a otevřená podmnožina X. Pak existuje $n \in \mathbb{Z}$ takové, že $x \in f^n(U)$. Pak $f^{-n}(x) \in U$ a $\overline{\mathrm{Orb}_f^+(x)} = X$. □

VĚTA 4.11. *Každý homeomorfizmus má minimální množinu.*

DŮKAZ. Buď $\mathcal{F}$ systém všech neprázdných, uzavřených podmnožin $Y \subset X$. Systém $\mathcal{F}$ je zřejmě neprázdný ($X \in \mathcal{F}$), uspořádejme jej operací "$\subset$". Podle Zornova Lemmatu má $\mathcal{F}$ minimální prvek Y_0, což je množina neprázdná, uzavřená a invariantní, tedy Y_0 je minimální množina. □

Poznamenejme, že každá minimální množina je buď konečná (cyklus) nebo nespočetná. Tedy neexistuje spočetná nekonečná minimální množina, viz Věta 4.2.

DEFINICE 4.12. Bod $x \in X$ je *uniformně rekurentní* pro zobrazení f, je-li $x \in \omega_f(x)$ a $\omega_f(x)$ je minimální. Množinu všech uniformně rekurentních bodů zobrazení f označujme $\mathrm{UR}(f)$.

PŘÍKLAD 4.13. Posloupnost na prostoru posloupností z Lemmatu 3.11, jehož orbita je hustá, je zřejmě rekurentní. Není však uniformně rekurentní, protože jeho omega limitní množina není hustá.

PŘÍKLAD 4.14. Konstruujme nyní uniformně rekurentní bod pomocí zobrazení posunu na dvou symbolech. Nejprve udělejme rozklad množiny přirozených čísel:

$$\mathcal{N} = \{N_n = 2^n(1 + 2\mathbb{N}_0), n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Vezměme nyní $A \subset \Sigma_2$ množinu všech posloupností, které mají nekonečně mnoho jedniček a nekonečně mnoho nul. Zřejmě je množina A nespočetná. Definujme nyní zobrazení, které "přerovná" každý bod z A tak, aby byl uniformně rekurentní. Tedy $\varphi : A \to \Sigma_2$ definujeme takto: $\varphi(x) = y_1 y_2 y_3 \ldots$, kde $y_k = x_s$, je-li $k \in N_s$. Tedy $\varphi(x) = x_1 x_2 x_1 x_3 x_1 x_2 x_1 x_4 x_1 x_2 x_1 x_3 x_1 \ldots$. Bod $\varphi(x)$ je uniformně rekurentní, protože každý jeho blok je téměř periodický. Navíc $\omega_\sigma(\varphi(x))$ je množina nespočetná.

Zobrazení φ je injektivní, takže množina $\varphi(A)$ je nespočetná a každý její bod je uniformně rekurentní a jeho omega limitní množina je nespočetná.

První vlastnost následujícího tvrzení automaticky plyne z definice uniformní rekurence a důkaz druhé vlastnosti se provede analogicky jako u rekurentního bodu.

VĚTA 4.15. *Buď $f \in C(X)$, pak platí:*

(1) *je-li M minimální, pak každý bod z M je uniformně rekurentní,*
(2) $\mathrm{UR}(f) \neq \emptyset$.

4.3. Tranzitivita

DEFINICE 4.16. Zobrazení $f \in C(X)$ je *(jednostranně) tranzitivní*, existuje-li $x \in X$ takové, že $\overline{\mathrm{Orb}_f^+(x)} = X$. Je-li navíc f homeomorfizmus, pak říkáme, že f je *(oboustranně) tranzitivní*, existuje-li $x \in X$ takové, že $\overline{\mathrm{Orb}_f(x)} = X$.

VĚTA 4.17. *Buď $f \in C(X)$ a $f(X) = X$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(1) *$f \in C(X)$ je (jednostranně) tranzitivní,*
(2) *je-li E uzavřená podmnožina X a $E \subset f^{-1}(E)$, pak $E = X$ nebo E je řídká množina,*
(3) *pro každé neprázdné otevřené množiny $U, V \subset X$ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$,*
(4) *množina všech x takových, že $\overline{\mathrm{Orb}_f^+(x)} = X$, je hustá a G_δ.*

DŮKAZ. Dokažme následující implikace:

1. $\Rightarrow$ 2. Přepokládejme, že $\overline{\mathrm{Orb}_f^+(x_0)} = X$ a $E \subset f^{-1}(E)$, kde $E \subset X$ je neprázdná uzavřená množina. Dále předpokládejme, že $U \subset E$ je otevřená množina. Pak existuje $p \in \mathbb{N}$ takové, že $f^p(x_0) \in U$ a $\{f^p(x_0), n > p\} \subset E$. Pak je $\{x_0, f(x_0), \dots f^{p-1}(x_0)\} \cap E = X$ a $f(\{x_0, f(x_0), \dots f^{p-1}(x_0)\} \cap E) = f(X)$. Tedy $\{f(x_0), \dots f^{p-1}(x_0)\} \cap E = X$. Po $p-2$ iteracích dostáváme, že $E = X$.

2. $\Rightarrow$ 3. Jsou-li $U, V \subset X$ neprázdné a otevřené, pak $\bigcup_{n=1}^\infty f^{-n}(U) \subset X$ je otevřená. Pak $f(\bigcup_{n=1}^\infty f^{-n}(U)) \subset \bigcup_{n=1}^\infty f^{-n}(U)$ a podle předpokladu 2. je množina $\bigcup_{n=1}^\infty f^{-n}(U)$ hustá v X. Tedy $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

3. $\Rightarrow$ 4. Označme $\{U_n\}_{n=1}^\infty$ bázi topologie množiny X. Pak množina všech bodů, jejichž orbita je hustá v X, lze zapsat $\bigcap_{n=1}^\infty \bigcup_{m=0}^\infty f^{-m}(U_n)$. Pak podle předpokladu 3. je množina $\bigcap_{m=0}^\infty f^{-m}(U_n)$ hustá i G_δ.

4. $\Rightarrow$ 1. Vyplývá triviálně. $\square$

DEFINICE 4.18. Buď $f \in C(X)$, pak bod x je *bloudivý*, jestliže existuje otevřené okolí U bodu x takové, že pro $n \geq 0$ jsou $f^{-n}(U)$ navzájem disjunktní. Bod x je *nebloudivý*, jestliže není bloudivý. Množinu všech nebloudivých bodů zobrazení f označujeme $\Omega(f)$ (tj. $\Omega(f) = \{x \in X : \forall \,\text{ot. mn. U bodu}\, x \;\exists n \geq 1 : f^{-n}(U) \cap U \neq \emptyset\}$).

VĚTA 4.19. *Pro $f \in C(X)$ platí:*

1. *$\Omega(f)$ je uzavřená,*
2. *$\bigcup_{x \in X} \omega_f(x) \subset \Omega(f)$, ($\Omega(f) \neq \emptyset$),*
3. *$\mathrm{Per}(f) \subset \Omega(f)$,*
4. *$f(\Omega(f)) \subset \Omega(f)$, je-li navíc f homeomorfizmus, pak $f(\Omega(f)) = \Omega(f)$,*
5. *je-li E minimální pro f, pak $E \subset \Omega(f)$.*

DŮKAZ.

1. Z definice $\Omega(f)$ plyne, že $X \setminus \Omega(f)$ je otevřená množina.
2. Buďte $x \in X$ a $y \in \omega_f(x)$. Chceme ukázat, že $y \in \Omega(f)$. Buď V okolí y. Chceme najít $n \geq 1$ takové, že $f^{-n}(V) \cap V \neq \emptyset$, hledáme tedy $n \geq 1$ a $z \in V$ takové, že $f^n(z) \in V$. Víme, že $f^{n_i}(x) \to y$ pro nějakou posloupnost $\{n_i\}$. Vezměme tedy $n_{i_0} < n_{i_1}$ takové, že $f^{n_0}(x) \in V$ a $f^{n_1}(x) \in V$. Závěrem položme $n = n_{i_1} - n_{i_0}$ a $z = f^{n_0}(x)$.
3. Je-li $f^n(x) = x$, $n > 0$, a U je okolí bodu x, pak $x \in f^{-n}(U) \cap U$.
4. Buďte $x \in \Omega(f)$ a V okolí bodu $f(x)$. Pak $f^{-1}(V)$ je okolí bodu x, tedy existuje $n > 0$ takové, že $f^{-(n+1)}(V) \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$. Tedy $f^{-n}(V) \cap V \neq \emptyset$ a $f(x) \in \Omega(f)$. Navíc f je homeomorfizmus, tedy $\Omega(f) = \Omega(f^{-1})$, a proto $f^{-1}\Omega(f) \subset \Omega(f)$.
5. Automaticky plyne z bodu (2).

□

DEFINICE 4.20. Pro $f \in C(X)$ říkáme, že:

1. f je *tranzitivní*, jestliže pro každé dvě neprázdné otevřené množiny $U, V \subset X$ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$,
2. f je *totálně tranzitivní*, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ je f^n tranzitivní,
3. f je *slabě míchající*, jestliže $f \times f : X \times X \to X \times X$ je tranzitivní,
4. f je *míchající*, jestliže pro každé neprázdné otevřené množiny $U, V \subset X$ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $N > n$ platí $f^N(U) \cap V \neq \emptyset$.

Všimněme si, že tranzitivita je ekvivalentní s jednostrannou tranzitivitou, viz Věta 4.17.

Poznamenejme, že slabé míchání lze definovat analogicky jako tranzitivitu, tedy f je *slabě míchající*, jestliže pro každé tři neprázdné otevřené množiny $U, V, W \subset X$ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $f^n(U) \cap W \neq \emptyset$ a $f^n(V) \cap W \neq \emptyset$. Pak zřejmě platí:

VĚTA 4.21. *Pro $f \in C(X)$ platí následující implikace:*
f je míchající $\Rightarrow$ f je slabě míchající $\Rightarrow$ f je totálně tranzitivní $\Rightarrow$ f je tranzitivní.

4.4. Cvičení

Dokažte následující tvrzení:

a) Spojité zobrazení kompaktního metrického prostoru $f : X \to X$ je tranzitivní tehdy a jen tehdy, existuje-li $x \in X$, jehož orbita je hustá.
b) Zobrazení f nazýváme *bitranzitivním*, je-li f^2 tranzitivní. Dokažte, že je-li $f : I \to I$ spojité a bitranzitivní, pak je f^n tranzitivní pro každé $n \in \mathbb{N}$. Nalezněte protipříklad na opačnou implikaci.
c) Množina periodických bodů spojitého tranzitivního zobrazení $f : I \to I$ je hustá v I.
d) Dokažte Větu 4.21 a nalezněte protipříklady k opačným implikacím implikace.
e) Funkce stan T definovaná ve Cvičení 1.44 je tranzitivní. (K důkazu použijte tvrzení ze Cvičení 1.45.a.)

Literatura

[1] Block, L. S., Coppel, W. A. *Dynamics in one dimension.* Lecture Notes in Mathematics,1513. Springer-Verlag, Berlin,1992.

[2] Block, L.S., Guckenheimer, J., Misiuriewicz, M., Young, L. S. *Periodic points and topological entropy of one dimensional maps.* Global Theory of Dynamical Systems. Lecture Notes in Mathematics, 819. Berlin, Springer 1980, 18-34.

[3] Devaney, R. L. *An introduction to chaotic dynamical systems.* Second edition. Addison-Wesley Studies in Nonlinearity. Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Redwood City, CA, 1989.

[4] Sharkovskii, A. N. *On cycles and the structure of a continuous mapping (Russian).* Ukr. Mat. Ž., 17, 1965, 104–111.

[5] Sharkovskii, A. N. Ukrain. Math. Journal, 18, 1966, 127–130.

[6] Smítal, J. *On functions and functional equations.* Adam Hilger, Ltd., Bristol, 1988.

[7] Walters, P. *An introduction to ergodic theory.* Graduate Texts in Mathematics, 79. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

[8] Furstenberg, H. *Recurrence in Ergodic Theory and Combinational Number Theory.* Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1981.

[9] Holmgren, R. A. *A first course in discrete dynamical systems* Springer, New York, 1996.

[10] Bruckner, A. M., Bruckner J. B., Thomson B. S. *Elementary real analysis*, Prentice-Hall, 2001.

[11] Wikipedia - The free encyclopedia, *Brouwer fixed point theorem*
URL: `http://en.wikipedia.org/wiki/Brouwer_theorem`
datum posledního ověření aktuálnosti: 11.12.2008

Index