Matematický ústav Slezské univerzity v Opavě
Učební texty k přednášce ALGEBRA II, letní semestr 2000/2001
Michal Marvan

9. Vektorové prostory

Vektor je kterýkoliv prvek některého vektorového prostoru. Vektorový prostor je množina, na níž je zavedena abstraktní algebraická struktura vektorového prostoru.

Definice. *Vektorový prostor nad polem* P je množina, řekněme V, spolu s
a) binární operací $V \times V \to V$, $(a, b) \mapsto a + b$; nazývá se *sčítání*;
b) jedním vybraným prvkem $0 \in V$; nazývá se *nula*;
c) zobrazením $V \to V$, $a \mapsto -a$; prvek $-a$ se nazývá *opačný* k prvku a;
d) zobrazením $P \times V \to V$, $(p, a) \mapsto p \cdot a$; nazývá se *násobení skalárem*.
Přitom je požadováno, aby pro libovolné prvky $a, b, c \in V$ a $p, q \in P$ platilo

(1)	$a + b = b + a$,	(5)	$1 \cdot a = a$,
(2)	$a + (b + c) = (a + b) + c$,	(6)	$p \cdot (q \cdot a) = (p \cdot q) \cdot a$,
(3)	$a + 0 = a$,	(7)	$(p + q) \cdot a = (p \cdot a) + (q \cdot a)$,
(4)	$a + (-a) = 0$,	(8)	$p \cdot (a + b) = (p \cdot a) + (p \cdot b)$.

Prvky množiny V se nazývají *vektory*, prvky pole P se nazývají *skaláry*.

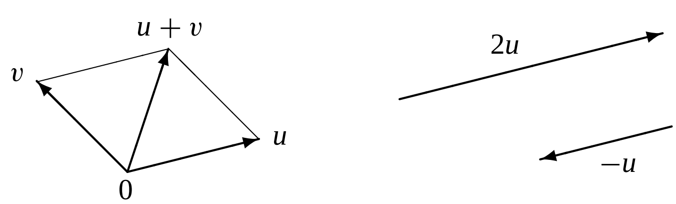
Podmínky (1)–(8) jsou *axiomy vektorového prostoru*. První čtyři znamenají, že $(V, +, 0, -)$ je komutativní grupa.

Všimněte si, že při násobení píšeme skalár vždy vlevo od vektoru. Násobící tečka se často vynechává. Vektorový prostor nad polem **R** resp. **C** se nazývá reálný resp. komplexní vektorový prostor.

Zobrazení $P \times V \to V$, $(p, a) \mapsto p \cdot a$, zřejmě není binární operace (není-li $P = V$). Toto zobrazení se obvykle nazývá vnější operace (obyčejná binární operace se pak může nazývat vnitřní operace). Na vektorovém prostoru tak máme vnitřní operaci sčítání a vnější operaci násobení skalárem.

Příklady. 1) Reálný vektorový prostor Eukleidovské geometrie, dvourozměrné i trojrozměrné. Vektor je zadán orientovanou úsečkou nebo uspořádanou dvojicí bodů (počáteční bod, koncový bod). Dva vektory považujeme za totožné, lze-li jeden převést na druhý rovnoběžným posunutím. *Umístění* vektoru v daném bodě X dostaneme rovnoběžným posunutím, při kterém počáteční bod vektoru splyne s X. (Cvičení: Vektor je třída jisté relace ekvivalence. Které?)

Součet vektorů získáme pravidlem rovnoběžníka, p-násobek vektoru p-násobným prodloužením úsečky (případně se změnou orientace, když $p < 0$):



Nulový vektor je degenerovaná úsečka nulové délky. Vektorový prostor vektorů v rovině resp. prostoru označíme E^2 resp. E^3.

Cvičení. Demonstrujte asociativitu sčítání vektorů v E^3. Zvolte tři vektory u, v, w v prostoru, umístěte je do společného bodu a doplňte do kosého hranolu. Ukažte, že vektor $(u + v) + w$ tvoří úhlopříčku tohoto hranolu. Totéž pro $u + (v + w)$.

2) Na každé jednoprvkové množině existuje struktura vektorového prostoru, dokonce nad libovolným polem P. Skutečně, označíme-li jediný prvek z M symbolem 0, stačí položit $0 + 0 = 0$, $-0 = 0$ a $p \cdot 0 = 0$ pro každé $p \in P$. Tento objekt se nazývá *nulový prostor* a značí se symbolem 0.

3) Každé pole je vektorovým prostorem nad sebou samým. Skutečně, položíme-li v definici vektorového prostoru $V = P$, budou všechny axiomy vektorového prostoru důsledky axiomů pole. (Ověřte.) Získáváme tak například vektorový prostor $\mathbf{R}$ nad $\mathbf{R}$, vektorový prostor $\mathbf{C}$ nad $\mathbf{C}$, vektorový prostor $\mathbf{Q}$ nad $\mathbf{Q}$ a vektorový prostor $\mathbf{Z}_2$ nad $\mathbf{Z}_2$.

4) Každé pole je vektorovým prostorem nad libovolým svým podpolem $Q \subset P$. Jediný rozdíl od předchozího příkladu spočívá v tom, že násobení skalárem je dovoleno jen pro skaláry z Q. Získáváme tak například vektorový prostor $\mathbf{C}$ nad $\mathbf{R}$, vektorový prostor $\mathbf{C}$ nad $\mathbf{Q}$ a vektorový prostor $\mathbf{R}$ nad $\mathbf{Q}$.

5) Buď n přirozené číslo, P pole. Na množině P^n všech uspořádaných n-tic prvků z P zaveďme vnitřní a vnější operaci předpisem

$$(u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, \ldots, v_n) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n),$$
$$p(u_1, u_2, \ldots, u_n) = (pu_1, pu_2, \ldots, pu_n)$$

Opět tak vzniká vektorový prostor P^n nad polem P. (Ověřte.) Například řádky a sloupce matic jsou prvky takových vektorových prostorů.

6) Vektorový prostor P^n nad podpolem $Q \subset P$ definujte sami.

7) Vektorový prostor P^X všech zobrazení $X \to P$, kde P je pole. Jsou-li $u, v : X \to P$ dvě taková zobrazení, pak jejich součet a násobek skalárem $p \in P$ jsou zobrazení $u + v : X \to P$ a $pu : X \to P$ zavedená předpisem

$$(u + v)(x) = u(x) + v(x),$$
$$(pu)(x) = p \cdot u(x).$$

V případě $P = \mathbf{R}$ dostáváme prostor všech reálných funkcí na X.

Tvrzení. *Buď V vektorový prostor nad polem P. Pak pro každé dva prvky $a, b \in V$, $p, q \in P$ platí:*

(i) $0 \cdot a = 0$,
(ii) $(-1) \cdot a = -a$,
(iii) $(p - q) \cdot a = p \cdot a - q \cdot a$,
(iv) $p \cdot (a - b) = p \cdot a - p \cdot b$,
(v) *Je-li $p \cdot a = 0$, pak $p = 0$ nebo $a = 0$.*

Důkaz. Cvičení

Definice. (1) Buďte $u_1, u_2, \ldots, u_n$ vektory z vektorového prostoru V nad polem P. *Lineární kombinace* vektorů $u_1, u_2, \ldots, u_n$ s koeficienty $p_1, p_2, \ldots, p_n \in P$ je vektor

$$p_1 u_1 + p_2 u_2 + \cdots + p_n u_n \quad \in V.$$

(2) Řekneme, že vektory $u_1, u_2, \ldots, u_n \in V$ *generují* vektorový prostor V, je-li každý vektor $v \in V$ jejich lineární kombinací, to jest, jestliže pro každý vektor $v \in V$ existují skaláry $p_1, p_2, \ldots, p_n \in P$ takové, že

$$v = p_1 u_1 + p_2 u_2 + \cdots + p_n u_n.$$

Říkáme též, že $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ je *množina generátorů.*

(3) Prostor V, který má (konečnou) množinu generátorů, se nazývá *konečněrozměrný.*

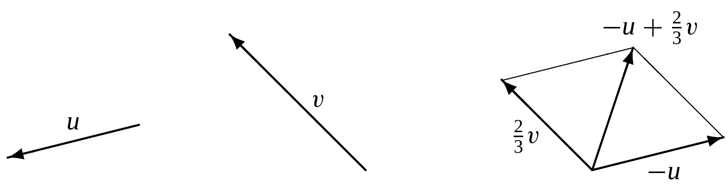
Příklad. 1) Součet vektorů u, v je jejich lineární kombinace s koeficienty 1, 1; rozdíl vektorů u, v je jejich lineární kombinace s koeficienty $1, -1$:

$$u + v = 1 \cdot u + 1 \cdot v, \qquad u - v = 1 \cdot u + (-1) \cdot v.$$

2) Lineární kombinace vektorů $(1, 2, 0, 1), (2, 3, 1, 0) \in \mathbf{R}^4$ s koeficienty $1, -2$ je

$$1 \cdot (1, 2, 0, 1) + (-2) \cdot (2, 3, 1, 0) = (-3, -4, -2, 1).$$

3) Lineární kombinace vektorů $u, v \in E^2$ s koeficienty -1 a $\frac{2}{3}$:



Nabývají-li čísla $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ všech možných hodnot, probíhá vektor $w = \alpha u + \beta v$ celou množinu E^2.

Cvičení. Pokuste se o důkaz. Návod: Použijte rovnoběžné promítání.

4) Prostor $\mathbf{R}^3$ je generován například vektory $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$. Skutečně, je-li $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ libovolný vektor, pak $(x, y, z) = x \cdot (1, 0, 0) + y \cdot (0, 1, 0) + z \cdot (0, 0, 1)$ je lineární kombinace (s koeficienty x, y, z).

5) Prostor $\mathbf{R}^3$ je generován taktéž vektory $(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)$. Je-li $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ libovolný vektor, pak $(x, y, z) = (x - y) \cdot (1, 0, 0) + (y - z) \cdot (1, 1, 0) + z \cdot (1, 1, 1)$ (ověřte) je lineární kombinace s koeficienty $x - y, y - z, z$.

6) Prostor $\mathbf{R}^3$ není generován vektory $(1, 2, 0), (3, 4, 0), (1, 1, 0)$. Skutečně, lineární kombinace s koeficienty x, y, z má nulovou třetí složku: $x \cdot (1, 2, 0) + y \cdot (3, 4, 0) + z \cdot (1, 1, 0) = (x + 3y + z, 2x + 4y + z, 0)$. Žádný vektor s nenulovou třetí složkou není lineární kombinací těchto vektorů.

7) Prostor $\mathbf{R}^3$ je generován vektory $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (3, 4, 5)$. Je-li $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ libovolný vektor, pak $(x, y, z) = x \cdot (1, 0, 0) + y \cdot (0, 1, 0) + z \cdot (0, 0, 1) + 0 \cdot (3, 4, 5)$ je lineární kombinace s koeficienty $x, y, z, 0$. V tomto případě můžeme najít dokonce nekonečně mnoho vyjádření ve tvaru lineární kombinace, a sice $(x, y, z) = (x - 3t) \cdot (1, 0, 0) + (y - 4t) \cdot (0, 1, 0) + (z - 5t) \cdot (0, 0, 1) + t \cdot (3, 4, 5)$, s koeficienty $x - 3t, y - 4t, z - 5t, t$, kde $t \in \mathbf{R}$ je parametr. (Ověřte.)

7) Obecně, r-tice vektorů $u_1, \dots, u_r \in \mathbf{R}^s$, kde $u_i = (u_{i1}, \dots, u_{is})$, generuje $\mathbf{R}^s$, jestliže má soustava

$$\begin{aligned} u_{11}x_1 + \dots + u_{r1}x_r &= v_1 \\ &\vdots \\ u_{1s}x_1 + \dots + u_{rs}x_r &= v_s \end{aligned}$$

alespoň jedno řešení $x_1, \dots, x_r$ pro každou pravou stranu $v_1, \dots, v_r$. Vskutku, soustava je ekvivalentní s podmínkou $(v_1, \dots, v_s) = x_1(u_{11}, \dots, u_{1s}) + \dots + x_r(u_{r1}, \dots, u_{rs})$.

Příklad. Uveďme příklad prostoru, který není konečněrozměrný. Polynom s reálnými koeficienty je výraz $a_nx^n + \dots + a_1x + a_0$, kde $a_n, \dots, a_0 \in \mathbf{R}$ a $n \in \mathbf{N}$. Číslo n se nazývá stupeň polynomu $a_nx^n + \dots + a_1x + a_0$, je-li $a_n \neq 0$. Množina všech takových polynomů je vektorový prostor $\mathbf{R}[x]$ vzhledem k obyčejnému sčítání polynomů a jejich násobení reálným číslem.

$\mathbf{R}[x]$ ovšem nemá žádnou konečnou množinu generátorů. Je-li totiž $p_1, \dots, p_s$ nějaká konečná množina polynomů, pak jistě existuje číslo N, které je větší než stupeň kteréhokoliv z polynomů $p_1, \dots, p_s$. Pak žádný z těchto polynomů ani žádná jejich lineární kombinace neobsahuje x^N s nenulovým koeficientem. Polynom $x^N \in \mathbf{R}[n]$ tudíž není lineární kombinací vektorů $p_1, \dots, p_s$.

Definice. Řekneme, že vektory $e_1, e_2, \dots, e_n \in V$ jsou *lineárně nezávislé*, jestliže z rovnosti

$$x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n = 0, \quad \text{kde } x_1, x_2, \dots, x_n \in P,$$

plyne $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Řekneme, že vektory $e_1, e_2, \dots, e_n \in V$ jsou *lineárně závislé*, jestliže nejsou lineárně nezávislé.

Příklad. 1) Vektory $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ prostoru $\mathbf{R}^3$ jsou lineárně nezávislé. Skutečně, položme $x \cdot (1,0,0) + y \cdot (0,1,0) + z \cdot (0,0,1) = (0,0,0)$. Na levé straně této rovnosti máme vektor (x, y, z), a ten je roven vektoru $(0,0,0)$ právě tehdy, když $x = y = z = 0$.

2) Vektory $(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)$ prostoru $\mathbf{R}^3$ jsou rovněž nezávislé. Skutečně, položme opět $x \cdot (1,0,0) + y \cdot (1,1,0) + z \cdot (1,1,1) = (0,0,0)$. Na levé straně je vektor $(x + y + z,\ y + z,\ z)$, a ten je nulový právě tehdy, když $x = y = z = 0$ (ověřte).

3) Vektory $(3,2,1), (3,1,0), (6,3,1)$ jsou lineárně závislé. Máme totiž $(3,2,1) + (3,1,0) - (6,3,1) = (0,0,0)$, přičemž koeficienty $1, 1, -1$ nejsou všechny nulové.

4) Libovolná n-tice vektorů obsahující nulový vektor je lineárně závislá. Je-li např. $u_1, \dots, u_{n-1}, 0$ taková n-tice, pak $0u_1 + \dots + 0u_{n-1} + 1 \cdot 0 = 0$ je nulová lineární kombinace s koeficienty $0, \dots, 0, 1$, které nejsou všechny nulové.

5) Obecně, r-tice vektorů $u_i = (u_{i1}, \dots, u_{is})$ z $\mathbf{R}^s$ je nezávislá, právě když má soustava

$$\begin{aligned} u_{11}x_1 + \dots + u_{r1}x_r &= 0 \\ &\vdots \\ u_{1s}x_1 + \dots + u_{rs}x_r &= 0 \end{aligned}$$

právě jedno řešení, a sice $x_1 = \dots = x_r = 0$.

Cvičení. Libovolná podmnožina lineárně nezávislé množiny vektorů je lineárně nezávislá. Dokažte.

Definice. *Báze* vektorového prostoru je libovolná n-tice jeho lineárně nezávislých generátorů.

Tvrzení. *Buď $e_1, e_2, \dots, e_n$ báze vektorového prostoru V. Pak pro každý vektor $v \in V$ existuje právě jedna n-tice skalárů $x_1, x_2, \dots, x_n \in P$ taková, že $v = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n$.*

Důkaz. Nechť $e_1, \dots, e_n$ generují V. Buď $v \in V$. Pak existují koeficienty $x_1, x_2, \dots, x_n$ takové, že $v = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$. Nechť jsou vektory $e_1, \dots, e_n$ navíc lineárně nezávislé. Dokažme jednoznačnost. Je-li $y_1, \dots, y_n$ jiná n-tice koeficientů taková, že $v = y_1e_1 + \dots + y_ne_n$, pak

$$\begin{aligned} 0 = v - v &= (x_1e_1 + \dots + x_ne_n) - (y_1e_1 + \dots + y_ne_n) \\ &= (x_1 - y_1)e_1 + \dots + (x_n - y_n)e_n. \end{aligned}$$

Z lineární nezávislosti vektorů $e_1, \dots, e_n$ pak plyne $x_1 - y_1 = \dots = x_n - y_n = 0$, a tedy $x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$, což se mělo dokázat.

Cvičení. Zformulujte a dokažte obrácené tvrzení.

Definice. Skaláry $x_1, x_2, \dots, x_n$ z předchozího tvrzení se nazývají *souřadnice* vektoru v v bázi $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Příklad. 1) Vektory $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ tvoří bázi prostoru $\mathbf{R}^3$. Souřadnice vektoru $(x, y, z) = x \cdot (1, 0, 0) + y \cdot (0, 1, 0) + z \cdot (0, 0, 1)$ jsou x, y, z.

2) Při změně báze se mění souřadnice. Trojice vektorů $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$ je jiná báze téhož prostoru $\mathbf{R}^3$. Je-li $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ libovolný vektor, pak

$$(x, y, z) = (x - y) \cdot (1, 0, 0) + (y - z) \cdot (1, 1, 0) + z \cdot (1, 1, 1)$$

(ověřte). Tudíž, vektor (x, y, z) má v této nové bázi souřadnice $x - y, y - z, z$.

Tvrzení. *Buď $e_1, e_2, \dots, e_n$ nějaká báze vektorového prostoru V; všechny souřadnice buďte vztaženy k této bázi. Buďte $x_1, x_2, \dots, x_n \in P$ souřadnice vektoru $u \in V$, $y_1, y_2, \dots, y_n \in P$ souřadnice vektoru $v \in V$. Pak jsou $x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n$ souřadnice vektoru $u + v$. Buď dále $p \in P$ libovolný skalár. Pak jsou $px_1, px_2, \dots, px_n$ souřadnice vektoru pu.*

Důkaz. Cvičení.

Běžně má vektorový prostor více bazí, pokud má alespoň jednu. Ukažme, že počet vektorů báze vektorového prostoru je konstanta nezávislá na volbě konkrétní báze. K tomu budeme potřebovat pomocná tvrzení.

Definice. *Elementární úprava* konečné n-tice tvořené vektory $u_1, \dots, u_n \in V$ je:
(1) vynásobení i-tého vektoru nenulovým skalárem $c \in P \setminus \{0\}$;
(2) přičtení c-násobku j-tého vektoru k i-tému;
(3) výměna i-tého vektoru s j-tým.
Přitom vznikají po řadě n-tice

$$(u_1, \dots, u_{i-1}, cu_i, u_{i+1}, \dots, u_n),$$

$$(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i + cu_j, u_{i+1}, \dots, u_j, \dots, u_n),$$

$$(u_1, \dots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, u_i, u_{j+1}, \dots, u_n).$$

Ke každé z těchto úprav existuje úprava inverzní, která je rovněž elementární úpravou (ověřte):
(1′) vynásobení i-tého vektoru nenulovým skalárem $c^{-1} \in P \setminus \{0\}$;
(2′) přičtení $-c$-násobku j-tého vektoru k i-tému;
(3′) výměna i-tého vektoru s j-tým.

Definice. Řekneme, že dvě n-tice vektorů jsou *ekvivalentní*, jestliže jedna vznikne z druhé konečnou posloupností elementárních úprav.

Cvičení. Ukažte, že právě zavedená relace mezi n-ticemi vektorů je reflexivní, symetrická a tranzitivní.

Příklad. Uvažujme o matici typu r/s nad polem P. Její řádky jsou s-tice prvků pole P, tj. vektory z prostoru P^s. Celá matice je pak r-ticí takových s-tic, tedy s-ticí vektorů z prostoru P^s. Elementární úpravy této r-tice vektorů jsou právě elementární řádkové úpravy dané matice.

Tvrzení. *Nechť je n-tice $u_1, \dots, u_n \in V$ ekvivalentní s n-ticí $v_1, \dots, v_n \in V$. Pak n-tice $u_1, \dots, u_n$ generuje V právě tehdy, když n-tice $v_1, \dots, v_n$ generuje V.*

Důkaz. Nechť $v_1, \dots, v_n$ generují V, ukažme, že pak i $u_1, \dots, u_n$ generují V. Ověřme to například pro druhou úpravu. Nechť $v_i = u_i + cu_j$ a $v_l = u_l$ pro $l \neq i$. Buď $w \in V$ libovolný vektor. Existují koeficienty $p_1, \dots, p_n$ takové, že $w = p_1 v_1 + \cdots + p_n v_n$. Pak

$$\begin{aligned} w &= p_1 u_1 + \cdots + p_i(u_i + cu_j) + \cdots + p_j u_j + \cdots + p_n u_n \\ &= p_1 u_1 + \cdots + p_i u_i + \cdots + (pu_i + p_j)u_j + \cdots + p_n u_n \end{aligned}$$

je lineární kombinace vektorů $u_1, \dots, u_n$. Pro ostatní úpravy obdobně.

Opačná implikace vyplývá z právě dokázané, protože n-tice $u_1, \dots, u_n$ vzniká z n-tice $v_1, \dots, v_n$ inverzní úpravou.

Výsledek zřejmě platí i pro libovolnou posloupnost elementárních úprav.

Tvrzení. *Nechť je n-tice $u_1, \dots, u_n$ ekvivalentní s n-ticí $v_1, \dots, v_n$. Vektory $u_1, \dots, u_n$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když jsou vektory $v_1, \dots, v_n$ lineárně nezávislé.*

Důkaz. Opět stačí dokázat jednu z implikací pro jednotlivé elementární úpravy. Buďte tedy vektory $u_1, \dots, u_n$ lineárně nezávislé. Podáme důkaz, že vektory $v_1, \dots, v_n$ vzniklé při druhé úpravě jsou lineárně nezávislé.

Nechť $v_i = u_i + cu_j$ a $v_l = u_l$ pro $l \neq i$. Zkoumejme rovnost

$$\begin{aligned} 0 &= x_1 v_1 + \cdots x_n v_n = x_1 u_1 + \cdots + x_i(u_i + cu_j) + \cdots + x_j u_j + \cdots x_n u_n \\ &= x_1 u_1 + \cdots + x_i u_i + \cdots + (cx_i + x_j)u_j + \cdots x_n u_n. \end{aligned}$$

Vektory $u_1, \dots, u_n$ jsou lineárně nezávislé, a proto jsou všechny koeficienty poslední lineární kombinace nulové, tj. $x_1 = \cdots = x_i = \cdots = cx_i + x_j = \cdots = x_n = 0$. Jelikož $x_i = 0$, máme $x_j = cx_i + x_j = 0$. Ostatní úpravy analogicky.

Tvrzení. *Nechť vektory $v_1, \dots, v_n$ generují prostor V, nechť jsou jiné vektory $u_1, \dots, u_m \in V$ lineárně nezávislé. Pak $n \geq m$.*

Důkaz. Vektory $u_1, \dots, u_m$ mají podle předpokladu vyjádření $u_i = p_{i1} v_1 + \cdots + p_{in} v_n$, $i = 1, \dots, m$. Uvažujme o matici

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{m1} & \cdots & p_{mn} \end{pmatrix}$$

typu m/n. Proveďme řádkové úpravy, které matici P převedou na schodovitý tvar P'. Tytéž elementární úpravy buďtež provedeny s vektory $u_1, \dots, u_m$; upraveným vektorům $u'_1, \dots, u'_m$ pak odpovídá matice P' (ověřte). Připustíme-li, že $m > n$, pak poslední řádek matice P' bude nulový. Vektory $u'_1, \dots, u'_m$ jsou opět nezávislé, ale $u'_m = 0$, což je spor.

Důsledek. *Jsou-li $v_1, \dots, v_n$ a $u_1, \dots, u_m$ dvě báze vektorového prostoru V, pak $n = m$.*

Definice. *Dimenze* vektorového prostoru V je počet vektorů (libovolné) jeho báze. Vektorový prostor dimenze n se nazývá n-rozměrný. Zapisujeme $n = \dim V$. O nulovém vektorovém prostoru $\{0\}$ říkáme, že je 0-rozměrný.

Rozšíříme-li vhodně naše definice, dosáhneme toho, že i nulový prostor $\{0\}$ bude mít bázi. Bude jí prázdná množina $\emptyset$ (nebo 0-tice) vektorů. Skutečně, dohodneme-li se, že součtem prázdné množiny sčítanců bude nula, bude 0 lineární kombinací. Nezávislost prázdné množiny vektorů pak plyne z toho, že všechny koeficienty z prázdné množiny koeficientů jsou nulové.

Příklad. (1) Vektorový prostor P^n nad polem P je n-rozměrný. Jednou z bazí je n-tice $(1, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, 0, \dots, 0)$, $(0, 0, \dots, 1)$.

(2) Vektorový prostor $\mathbf{C}$ nad polem $\mathbf{R}$ je dvourozměrný. Jednou z možných bazí je dvojice 1, i. Co jsou souřadnice vektoru $z = a + b\mathrm{i} \in \mathbf{C}$ v této bázi? Nad polem $\mathbf{C}$ je vektorový prostor $\mathbf{C}$ samozřejmě jednorozměrný, jednu z možných bazí tvoří vektor 1. Vidíme, že dva vektorové prostory mohou mít *různé* dimenze, přestože mají *stejné* množiny vektorů.

(3) Vektorový prostor $\mathbf{C}^n$ nad polem $\mathbf{R}$ je $2n$-rozměrný. Jednou z mnoha bazí je $2n$-tice $(1, 0, \dots, 0)$, $(\mathrm{i}, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, 0, \dots, 0)$, $(0, \mathrm{i}, 0, \dots, 0)$, $(0, 0, \dots, 1)$, $(0, 0, \dots, \mathrm{i})$.

Mezi lineární závislostí a generováním je blízký vztah.

Tvrzení. *Vektory $v_1, \dots, v_n$ vektorového prostoru V jsou lineárně závislé právě tehdy, když alespoň jeden z nich je lineární kombinací ostatních, tj. právě když existuje index i takový, že v_i je lineární kombinací vektorů $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$.*

Důkaz. Nechť jsou vektory $v_1, \dots, v_n$ lineárně závislé. To znamená, že existují koeficienty $c_1, \dots, c_n$, ne všechny rovné nule, takové, že $c_1v_1 + \dots + c_nv_n = 0$. Je-li $c_i \neq 0$, potom můžeme vyjádřit v_i jako

$$v_i = -\frac{1}{c_i}(c_1v_1 + \dots + c_{i-1}v_{i-1} + c_{i+1}v_{i+1} + \dots + c_nv_n),$$

a tudíž v_i je lineární kombinací vektorů $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$.

Naopak, je-li v_i lineární kombinací vektorů $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$, pak máme

$$v_i = c_1v_1 + \dots + c_{i-1}v_{i-1} + c_{i+1}v_{i+1} + \dots + c_nv_n,$$

načež $c_1v_1 + \dots + c_{i-1}v_{i-1} - v_i + c_{i+1}v_{i+1} + \dots + c_nv_n = 0$ s nenulovým koeficientem -1 u v_i.

Tvrzení. *Vektory $v_1, \dots, v_n$ vektorového prostoru V jsou lineárně závislé, právě když alespoň jeden z nich je lineární kombinací předchozích, tj. právě když existuje index i takový, že v_i je lineární kombinací vektorů $v_1, \dots, v_{i-1}$.*

Důkaz. Postupujme jako v důkazu předchozího tvrzení, jenom koeficient $c_i \neq 0$ vyberme s nejvyšším možným indexem. To znamená, že potom $c_{i+1} = \cdots = c_n = 0$; zbytek je zřejmý. (Jako cvičení rozeberte podrobně případ $i = 1$, kdy bude množina předcházejících vektorů prázdná.)

Opačným směrem: Tvrzení je speciálním případem předchozího.

Dříve jsme definovali konečněrozměrný vektorový prostor jako takový, který má konečnou množinu generátorů. Ukažme, že pak už má i bázi.

Tvrzení. *Každý konečněrozměrný vektorový prostor má bázi.*

Důkaz. Ukažme, že z množiny generátorů můžeme vybrat lineárně nezávislou část. Buďte $v_1, \dots, v_n$ generátory prostoru V. Vyškrtněme z tohoto seznamu vektor v_1 jestliže $v_1 = 0$. Dále postupně pro $i = 2, \dots, n$ vyškrtněme vektor v_i, právě když je lineárně závislý na předchozích. Zbývající vektory buďte $v_{i_1}, \dots, v_{i_r}$, říkejme jim vybrané vektory. Vyškrtnutím lineárně závislého vektoru se vlastnost generování nezmění (ověřte podrobně), a proto vybrané vektory generují V.

Dále ukažme, že vybrané vektory $v_{i_1}, \dots, v_{i_r}$ jsou nezávislé. Jinak by totiž alespoň jeden z nich, řekněme v_{i_j}, byl lineární kombinací předchozích vybraných vektorů $v_{i_1}, \dots, v_{i_{j-1}}$, a tím spíše všech vektorů $v_1, \dots, v_{i_{j-1}}$, a musel by být vyškrtnut, což je spor.

Definice. 1. *Minimální množina generátorů* vektorového prostoru V je množina vektorů, která generuje V, ale žádná její vlastní podmnožina negeneruje V.

2. *Maximální lineárně nezávislá množina vektorů* vektorového prostoru V je lineárně nezávislá množina vektorů z V, která není vlastní podmnožinou žádné lineárně nezávislé množiny.

Tvrzení. *Buďte $u_1, \dots, u_n \in V$ vektory. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní.*

(i) *$u_1, \dots, u_n$ je báze ve V;*

(ii) *$\{u_1, \dots, u_n\}$ je minimální množina generátorů vektorového prostoru V;*

(iii) *$\{u_1, \dots, u_n\}$ je maximální lineárně nezávislá množina vektorů vektorového prostoru V.*

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii): Báze je jistě lineárně nezávislá. Přidáním libovolného dalšího vektoru v se nezávislost poruší, protože v je lineární kombinací vektorů báze. (Rozeberte podrobně.)

(ii) $\Rightarrow$ (i): Stačí ukázat, že maximální lineárně nezávislá množina $\{u_1, \dots, u_n\}$ generuje V. Buď v libovolný vektor z V, množina $\{u_1, \dots, u_n, v\}$ je podle definice lineárně závislá, takže existují koeficienty $x_1, \dots, x_n, y$, ne všechny nulové, splňující $x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n + yv = 0$. Kdyby $y = 0$, pak by šlo o rovnost $x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n = 0$, z níž by plynulo $x_1 = \cdots = x_n = 0 = y$, což jsme vyloučili. Proto $y \neq 0$ a vektor v lze vyjádřit jako $v = -y^{-1} \cdot (x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n)$. Tudíž, $\{u_1, \dots, u_n\}$ generuje V.

(i) $\Rightarrow$ (iii): Báze jistě generuje V. Žádná vlastní podmnožina $\{u_{i_1}, \dots, u_{i_r}\}$ ale negeneruje V. Skutečně, žádný ze zbylých vektorů $u_j \notin \{u_{i_1}, \dots, u_{i_r}\}$ nemůže být lineární kombinací vektorů $u_{i_1}, \dots, u_{i_r}$, protože by to znamenalo, že množina $\{u_{i_1}, \dots, u_{i_r}, u_j\}$ je lineárně závislá.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Stačí ukázat, že minimální množina generátorů $\{u_1, \dots, u_n\}$ je lineárně nezávislá. Připusťme opak, tj. že množina $\{u_1, \dots, u_n\}$ je závislá. Pak lze ten z vektorů u_i, který je lineární kombinaci ostatních, vypustit. (Rozeberte podrobně.)

Tvrzení poskytuje dvě alternativní definice báze, které se často používají. Má též důležité důsledky.

Důsledek. *Buď V n-rozměrný vektorový prostor. Pak*

(1) *libovolných n lineárně nezávislých vektorů $u_1, \dots, u_n \in V$ tvoří bázi ve V;*

(2) *libovolných n generátorů $u_1, \dots, u_n \in V$ tvoří bázi ve V.*

Důkaz. (1) V prostoru V existuje n generátorů, takže lineárně nezávislých vektorů v něm musí být $\leq n$. Množina $\{u_1, \dots, u_n\}$ má n prvků, a proto je maximální lineárně nezávislou množinou, čili bazí.

(2) V prostoru V existuje n lineárně nezávislých vektorů, takže generátorů v něm musí být $\geq n$. Množina $\{u_1, \dots, u_n\}$ má n prvků, a proto je minimální množinou generátorů, čili bazí.

Důsledek. *Buďte $u_1, \dots, u_k$ libovolné lineárně nezávislé vektory n-rozměrného vektorového prostoru V. Pak je lze doplnit do báze $u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n$.*

Důkaz. V případě, že vektory $u_1, \dots, u_k$ generují V, tvoří bázi. Jinak existuje vektor $u_{k+1} \in V$, který není lineární kombinací vektorů $u_1, \dots, u_k$, načež jsou vektory $u_1, \dots, u_k, u_{k+1}$ lineárně nezávislé, protože u_{k+1} není lineární kombinací předchozích vektorů.

Opakováním téže úvahy získáme lineárně nezávislé vektory $u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, u_{k+2}$. Po s krocích obdržíme lineárně nezávislé vektory $u_1, \dots, u_k, u_{k+s}$. Po $n - k$ krocích budeme mít n lineárně nezávislých vektorů, které budou tvořit bázi podle předchozího důsledku.

Cvičení. Nechť je každý z vektorů $v_1, \dots, v_n \in V$ lineární kombinací vektorů $u_1, \dots, u_m \in V$. Jestliže $v_1, \dots, v_n$ generují V, pak $u_1, \dots, u_m$ též generují V. Dokažte.