Matematický ústav Slezské univerzity v Opavě
Učební texty k přednášce ALGEBRA II, letní semestr 2000/2001
Michal Marvan

17. Bilineární a kvadratické formy

Eukleidovský skalární součin je zvláštním případem symetrické bilineární formy. Při studiu obecných bilineárních forem se omezíme na reálný případ. Budeme používat Einsteinovu sumační konvenci.

1. Bilineární formy

Definice. Buď V vektorový prostor nad polem reálných čísel $\mathbf{R}$. *Bilineární forma* na V je zobrazení $\beta : V \times V \to \mathbf{R}$, splňující pro libovolnou trojici vektorů $u, v, w \in V$ a libovolný skalár $a \in \mathbf{R}$

$$\beta(u + v, w) = \beta(u, w) + \beta(v, w), \qquad \beta(au, w) = a\beta(u, w),$$
$$\beta(u, v + w) = \beta(u, v) + \beta(u, w), \qquad \beta(u, aw) = a\beta(u, w),$$

(linearita v prvním a druhém argumentu).

Příklad. Každý eukleidovský skalární součin je bilineární forma.

Příklad. Buď B libovolná čtvercová matice typu n/n. Uvažujme o vektorovém prostoru $\mathbf{R}^n$. Pro libovolné vektoy $x = (x^1, \dots, x^n)$ a $y = (y^1, \dots, y^n) \in \mathbf{R}^n$ položme

$$\phi_B(x, y) = \sum_{i,j} B_{ij} x^i y^j$$

(horní indexy nejsou mocniny!). V maticovém zápisu

$$\phi_B(x, y) = x^\top B y$$

(ověřte), chápeme-li x, y jako matice s jedním sloupcem. Pak je ϕ_B bilineární forma na $\mathbf{R}^n$ (plyne z vlastností maticového násobení).

Například, matice $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ zadává bilineární formu

$$\begin{pmatrix} x^1 & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x^1 y^1 + 2x^1 y^2 + 3x^2 y^1 + 4x^2 y^2.$$

Libovolnou bilineární formu lze úplně popsat čtvercovou maticí.

Definice. Buď V konečněrozměrný vektorový prostor s bazí $e_1, \dots, e_n$. Matice B s prvky $B_{ij} = \beta(e_i, e_j)$ se nazývá *matice bilineární formy* β vzhledem k bázi $e_1, \dots, e_n$.

Tvrzení. *Buď V konečněrozměrný vektorový prostor s bazí $e_1, \dots, e_n$, buď β bilineární forma na V, která má vzhledem k uvedené bázi matici B_{ij}. Buďte u, v libovolné vektory o souřadnicích $(x^1, \dots, x^n)$ resp. $(y^1, \dots, y^n)$ v bázi $e_1, \dots, e_n$. Pak platí*

$$\beta(u, v) = \sum_{i,j} B_{ij} x^i y^j = x^\top B y,$$

chápeme-li x, y jako matice s jedním sloupcem tvořeným prvky $x^1, \dots, x^n$ resp. $y^1, \dots, y^n$.

Důkaz. $\beta(u,v) = \beta(\sum_i x^i e_i, \sum_j y^j e_j) = \sum_{i,j} x^i y^j \beta(e_i, e_j) = \sum_{i,j} x^i y^j B_{ij}$. Součin $x^\top By$ je popsán identickou formulí.

Při změně báze $e_1, \dots, e_n$ se mění i matice B.

Tvrzení. *Buď Q matice přechodu od báze $e_1, \dots, e_n$ k nové bázi $e'_1, \dots, e'_n$. Buď B matice bilineární formy β vzhledem k bázi $e_1, \dots, e_n$, buď B' matice téže formy vzhledem k bázi $e'_1, \dots, e'_n$. Pak platí*

$$B'_{ij} = \sum_{k,l} Q_i^k Q_j^l B_{kl}\,;$$

v maticovém zápisu

$$B' = Q^\top BQ.$$

Důkaz. Máme $e'_i = \sum_i Q_i^k e_k$ a podobně $e'_j = \sum_j Q_j^l e_l$. Potom však platí $B'_{ij} = \beta(e'_i, e'_j) = \beta(\sum_k Q_i^k e_k, \sum_l Q_j^l e_l) = \sum_{k,l} Q_i^k Q_j^l \beta(e_k, e_l) = \sum_{k,l} Q_i^k Q_j^l B_{kl}$. Součin $Q^\top BQ$ je dán touž formulí.

2. Kongruentnost matic

Definice. Čtvercové matice A, B se nazývají *kongruentní*, existuje-li invertibilní matice Q taková, že $A = Q^\top BQ$.

Rozdíl mezi kongruentností $A = Q^\top BQ$ a podobností $A = Q^{-1}BQ$ je jen v záměně transpozice za inverzi. Poznamenejme, že je-li Q ortogonální matice, pak $Q^\top = Q^{-1}$ a podobnost je totéž co kongruentnost.

Kongruentní matice vyjadřují jednu a tutéž bilineární formu v různých bazích (zatímco podobné matice vyjadřují jedno a totéž lineární zobrazení v různých bazích).

Tvrzení. *Kongruentnost čtvercových matic je relace ekvivalence.*

Důkaz. Reflexivita je zřejmá (Q = jednotková matice). Symetrie: Jestliže $A = Q^\top BQ$, pak $B = Q^{\top -1}AQ^{-1} = Q^{-1\top}AQ^{-1}$ (cvičení: ověřte, že $Q^{\top -1} = Q^{-1\top}$). Tranzitivita: Jestliže $A = Q^\top BQ$ a $B = P^\top CP$, pak $A = Q^\top P^\top CPQ$ a $B = (PQ)^\top C(PQ)$.

3. Symetrické bilineární formy

Další studium bilineárních forem omezíme na speciální, ale důležitý případ symetrických bilineárních forem.

Definice. Bilineární forma, která splňuje $\beta(u,v) = \beta(v,u)$ se nazývá *symetrická*.

Tvrzení. *Bilineární forma β je symetrická právě tehdy, když je její matice B (v libovolné bázi) symetrická, tj. když platí $B^\top = B$.*

Důkaz. Buď $e_1, \dots, e_n$ báze ve V. Je-li forma β symetrická, pak B je symetrická, protože $B_{ij} = \beta(e_i, e_j) = \beta(e_j, e_i) = B_{ji}$. Je-li naopak matice B symetrická, pak β je symetrická, protože $\beta(u, v) = x^\top B y = (x^\top B y)^\top = y^\top B x = \beta(v, u)$ (druhá rovnost platí, protože $x^\top B y$ je matice typu 1/1).

Tvrzení. *Matice kongruentní se symetrickou maticí je symetrická.*

Důkaz. Cvičení.

4. Kvadratické formy

V geometrii i fyzice se často vyskytují kvadratické formy. Mezi nimi a symetrickými bilineárními formami je jednojednoznačná korespondence.

Definice. Buď $\beta : V \times V \to \mathbf{R}$ symetrická bilineární forma. Zobrazení $\bar{\beta} : V \to \mathbf{R}$ zadané předpisem $\bar{\beta}(v) = \beta(v, v)$ se nazývá *kvadratická forma* příslušná symetrické bilineární formě β. Bilineární forma β se nazývá *polarizace* kvadratické formy $\bar{\beta}$.

Příklad. Eukleidovský skalární součin je symetrická bilineární forma. Příslušná kvadratická forma je zobrazení $u \mapsto (u, u) = \|u\|^2$, čili kvadrát normy. Tudíž, skalární součin je polarizace kvadratické formy $u \mapsto \|u\|^2$.

Polarizaci lze úplně a jednoznačně zrekonstruovat z její kvadratické formy.

Tvrzení. *Každá kvadratická forma má právě jednu polarizaci.*

Důkaz. Platí

$$\beta(u, v) = \tfrac{1}{2}\big(\bar{\beta}(u + v) - \bar{\beta}(u) - \bar{\beta}(v)\big).$$

Vztah se snadno dokáže výpočtem $\bar{\beta}(u+v) = \beta(u+v, u+v) = \beta(u, u) + 2\beta(u, v) + \beta(v, v)$.

Příklad. Polarizací formy $a(x^1)^2 + bx^1x^2 + c(x^2)^2$ (vně závorek jsou mocniny, ostatní jsou horní indexy) je bilineární forma $ax^1y^1 + \frac{1}{2}bx^1y^2 + \frac{1}{2}by^1x^2 + cx^2y^2$ s maticí

$$\begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b & c \end{pmatrix}.$$

5. Kanonické tvary

Budeme řešit problém nalezení nějakého „jednoduchého“ tvaru v každé třídě kongruentnosti matic tak, aby svoji třídu kongruentnosti (pokud možno) jednoznačně identifikoval. Omezíme se jen na symetrický případ.

Tvrzení. *Každá reálná symetrická matice B je kongruentní s diagonální maticí, jejíž diagonální prvky jsou* 0, 1 *nebo* −1.

Důkaz. S maticí B provádějme elementární řádkové úpravy; za každou řádkovou úpravou nechť následuje tatáž úprava sloupcová. Ukažme, že vzniklá matice bude kongruentní s maticí B. Skutečně, řádkové úpravy nechť představují násobení elementárními maticemi $P_1, \dots, P_k$ zleva; matice B přejde v matici $P_k \cdots P_1 B$. Poté následují stejné úpravy provedené na sloupcích, kterým odpovídá násobení elementárními maticemi $P_1^\top, \dots, P_k^\top$ zprava. Výsledná matice proto bude

$$P_k \cdots P_1 B P_1^\top \cdots P_k^\top = P_k \cdots P_1 B (P_k \cdots P_1)^\top,$$

tudíž kongruentní s původní maticí B [odpovídající matice přechodu je $Q = (P_k \cdots P_1)^\top$].

Konkrétně provádějme elementární řádkové úpravy, které v matici B anulují všechny prvky pod hlavní diagonálou. Protože byla původní matice B symetrická, bude symetrická i vzniklá kongruentní matice, a proto nuly vzniknou i nad hlavní diagonálou.

Při anulování nediagonálního prvku $B_{ij} \neq 0$ postupujme následujícím způsobem: Je-li prvek B_{ii} nenulový, pak příslušná úprava nechť spočívá v přičtení B_{ij}/B_{ii}-násobku i-tého řádku; je-li $B_{ii} = 0$, pak je potřeba nejdříve pozici B_{ii} obsadit nenulovým prvkem a k tomu stačí k i-tému řádku přičíst c-násobek j-tého, kde c je vybráno tak, že $c \neq 0$ a $2B_{ij} + cB_{ii} \neq 0$ (ověřte; berte v úvahu i následnou úpravu sloupcovou).

Nechť má vzniklá diagonální matice na hlavní diagonále prvky $d_1, \dots, d_n$. Pro každý index i pro nějž $d_i \neq 0$ vynásobme $i$tý řádek a poté $i$tý sloupec prvkem $1/\sqrt{|d_i|}$. Vznikne diagonální matice s prvkem $d_i/|d_i| = \pm 1$ na místě každého nenulového prvku d_i, což je právě matice požadovaného tvaru.

Diagonální matice popsaná ve větě se nazývá *kanonický tvar symetrické matice vzhledem ke kongruentnosti*.

Metoda uvedená v důkazu je i prakticky použitelná. Jestliže přitom všechny řádkové úpravy souběžně aplikujeme na jednotkovou matici E, získáme matici $P = P_k \cdots P_1$, transponovanou k matici přechodu.

Komplexní symetrická matice může být naprosto stejnou metodou převedena na diagonální matici s čísly 0 a 1 na diagonále.

Důsledek. *Buď dána symetrická bilineární forma β na vektorovém prostoru V dimenze n. Pak existuje báze ve V taková, že matice formy β je v kanonickém tvaru.*

Ukazuje se, že kanonický tvar reálné symetrické matice je určen jednoznačně až na pořadí prvků $0, 1, -1$ na diagonále. Vyplývá to z věty, která se nazývá Sylvesterův zákon setrvačnosti. Větu lze dokázat různými způsoby; zde uvedený důkaz má geometrickou podstatu a zavedeme přitom některé důležité pojmy.

Označme $K_\beta = \{u \in V \mid \beta(u, v) = 0 \text{ pro každé } v \in V\}$. Pak K_β je podprostor (cvičení), nazývá se *jádro* bilineární formy β.

Vektor $u \in V$ nazveme *kladný*, pokud $\beta(u, u) > 0$, *záporný*, pokud $\beta(u, u) < 0$ a *izotropní*, pokud $\beta(u, u) = 0$.

Podprostor $P \subseteq V$, který kromě nuly obsahuje jen kladné vektory nazveme *kladný podprostor*. Podprostor $N \subseteq V$, který kromě nuly obsahuje jen záporné vektory nazveme *záporný podprostor*. (Oproti jádru nejsou kladné a záporné podprostory určeny jednoznačně.)

Lemma. *Buď β symetrická bilineární forma na konečněrozměrném vektorovém prostoru V. Buď $P \subseteq V$ libovolný kladný podprostor a $N \subseteq V$ libovolný záporný podprostor. Pak je součet $K_\beta + P + N$ přímý.*

Důkaz. Dokážeme, že $\dim(K_\beta + P + N) = \dim K_\beta + \dim P + \dim N$.

(1) Platí $P \cap N = 0$. Skutečně, buď u libovolný prvek průniku $P \cap N$. Připusťme, že $u \neq 0$ máme $\beta(u, u) > 0$ a současně $\beta(u, u) < 0$, což je spor.

(2) Platí $K_\beta \cap (P + N) = 0$. Skutečně, nechť $u \in K_\beta$ a současně $u \in P + N$, tj. $u = u_P + u_N$, kde $u_P \in P$ a $u_N \in N$. Připusťme, že $u \neq 0$. Rozeznávejme tři případy.

(a) Je-li $u_N = 0$, pak $u_P = u \in P \cap K_\beta \setminus \{0\}$ a podobně jako v (1) dojdeme ke sporu mezi $\beta(u_P, u_P) > 0$ (protože $u_P \in P \setminus \{0\}$) a $\beta(u_P, u_P) = 0$ (protože $u_P \in K_\beta$).

(b) Analogicky v případě, že $u_P = 0$.

(c) Zbývá případ $u_P \neq 0$ a zároveň $u_N \neq 0$. Máme $u \in K_\beta$, takže $\beta(u, v) = 0$ pro libovolné $v \in V$. Položíme-li zde $v = u_P$, obdržíme $0 = \beta(u, u_P) = \beta(u_P, u_P) + \beta(u_N, u_P)$; odtud

$$\beta(u_N, u_P) < 0,$$

jelikož $\beta(u_P, u_P) > 0$. Volíme-li ale $v = u_N$, dostaneme analogicky

$$\beta(u_P, u_N) > 0,$$

jelikož $\beta(u_N, u_N) < 0$. Naše forma je ale symetrická, tudíž $\beta(u_N, u_P) = \beta(u_P, u_N)$, spor.

(3) Podle (1) máme $\dim(P + N) = \dim P + \dim N - \dim(P \cap N) = \dim P + \dim N$. Dále podle (2) je $\dim(K_\beta + P + N) = \dim K_\beta + \dim(P + N) - \dim(K_\beta \cap (P + N)) = \dim K_\beta + \dim P + \dim N$, což bylo třeba dokázat.

Věta (Sylvesterův zákon setrvačnosti). *Buď β bilineární symetrická forma, buď B diagonální matice, která je maticí formy β v některé bázi. Pak počet nulových, kladných a záporných prvků na diagonále nezávisí na volbě báze.*

Důkaz. Nechť má forma β v nějaké bázi $e_1, \dots, e_{\dim V}$ diagonální matici B s prvky $d_1, \dots, d_p$, $-d_{p+1}, \dots, -d_{p+n}, 0, \dots, 0$ na diagonále, kde $d_1, \dots, d_{p+n}$ jsou kladná reálná čísla. Pak pro $u = x^i e_i$, $v = y^j e_j$ máme

$$\beta(u, v) = d_1 x^1 y^1 + \dots + d_p x^p y^p - d_{p+1} x^{p+1} y^{p+1} - \dots - d_{p+n} x^{p+n} y^{p+n}.$$

Zřejmě je podprostor $P := [\![e_1, \dots, e_p]\!]$ kladný, podprostor $N := [\![e_{p+1}, \dots, e_{p+n}]\!]$ záporný a dále $K_\beta = [\![e_{p+n+1}, \dots, e_{\dim V}]\!]$ (cvičení). Přitom však máme $\dim K_\beta + \dim P + \dim N = p + n + (\dim V - n - p) = \dim V$, což je maximální možný součet dimenzí. Odtud P je kladný podprostor maximální dimenze, zatímco N je záporný podprostor maximální dimenze. Tudíž, čísla p a n nezávisí na volbě báze.

Důsledek. *Počet nul, jedniček a minus jedniček na diagonále kanonického tvaru symetrické reálné matice nezávisí na postupu, kterým byl kanonický tvar získán.*

Příklad. (1) Uvažujme o symetrické bilineární formě β s maticí

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pak $\beta(x, y) = B_{ij} x^i y^j = x^1 y^1 - x^2 y^2$ pro $x = (x^1, x^2)$, $y = (y^1, y^2)$ a příslušná kvadratická forma je $\beta(x, x) = B_{ij} x^i x^j = (x^1)^2 - (x^2)^2$ (vně závorek jsou mocniny). Kladné vektory jsou ty, jež splňují $x_1 > x_2$, záporné jsou ty, jež splňují $x_1 < x_2$ a izotropní jsou ty, jež splňují $x_1 = x_2$.

Cvičení. Nalezněte jádro $\operatorname{Ker} \phi_B$ symetrické formy s maticí

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Určete maximální dimenzi kladného a záporného podprostoru.

6. Kladně definitní formy a matice

Definice. Symetrická bilineární forma na reálném vektorovém prostoru V se nazývá *kladně definitní*, je-li každý vektor $v \in V \setminus \{0\}$ kladný, tj. platí-li $\beta(v, v) > 0$ pro každé $v \neq 0$.

Libovolná symetrická matice B typu n/n je maticí symetrické bilineární formy $\phi_B(x, y) = \sum_{ij} B_{ij} x^i y^j$ na $\mathbf{R}^n$, kde $x = (x^1, \dots, x^n)$, $y = (y^1, \dots, y^n) \in \mathbf{R}^n$ (cvičení).

Definice. Symetrická reálná matice B se nazývá *kladně definitní*, je-li bilineární forma ϕ_B kladně definitní.

Kladně definitní symetrická bilineární forma je ovšem totéž, co eukleidovský skalární součin. Matice skalárního součinu se nazývá *Grammova matice*. Tudíž, Grammova matice je kladně definitní.

Tvrzení. *Symetrická bilineární forma β je kladně definitní právě tehdy, když existuje báze, v níž má jednotkovou matici.*

Důkaz. Je-li bilineární forma na V kladně definitní, pak celé V je kladný podprostor, načež v důkazu Sylvesterovy věty $p = \dim V$. Kanonický tvar pak má na diagonále samé kladné prvky, tedy jedničky. Jiný důkaz: Kladně definitní symetrická bilineární forma je eukleidovský skalární součin, a ten má v ortonormální bázi jednotkovou matici.

Naopak, bilineární forma s jednotkovou maticí, tj. forma $\beta(x, y) = \sum_i x^i y^i$, je kladně definitní (cvičení).

Důsledek. *Symetrická reálná matice B je kladně definitní právě tehdy, když je kongruentní s jednotkovou maticí.*

Cvičení. Ukažte, že matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

je kladně definitní. Návod: převeďte ji na kanonický tvar.

Existuje následující praktické kriterium kladné definitnosti.

Tvrzení. *Symetrická reálná čtvercová matice B typu n/n je kladně definitní právě tehdy, když platí $D_1 > 0, \dots, D_n > 0$, kde D_i označuje subdeterminant tvořený prvními i řádky a prvními i sloupci matice B.*

Důkaz. Je-li B kladně definitní, pak je kongruentní s jednotkovou maticí, tj. existuje invertibilní matice Q taková, že $Q^\top B Q = E$, načež $1 = \det E = \det(Q^\top B Q) = (\det Q)^2 \det B$. Odtud $D_n = \det B = 1/(\det Q)^2 > 0$.

Ohledně D_m, $m < n$: Matice B je maticí formy $\beta = \beta_B$ v bázi tvořené vektory $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $e_n = (0, \dots, 0, 1)$. Uvažujme o podprostoru $V^{(m)} = [\![e_1, \dots, e_m]\!]$. Na $V^{(m)}$ je předpisem $\beta^{(m)}(x, y) = \beta(x, y)$ pro $x, y \in V^{(m)}$ zadána kladně definitní symetrická bilineární forma $\beta^{(m)} : V^{(m)} \times V^{(m)} \to \mathbf{R}$ (cvičení). Forma $\beta^{(m)}$ má v bázi $e_1, \dots, e_m$ matici $B^{(m)}$, tvořenou prvky $\beta(e_i, e_j)$, $i, j \le m$, tj. tvořenou prvními m řádky a prvními m sloupci matice B. Ale pak $D_m = \det B^{(m)} > 0$ (viz předchozí odstavec).

Naopak, nechť platí $D_m > 0$ pro $m = 1, \dots, n$. Matici B převedeme na kanonický tvar symetricky prováděnými elementárními úpravami. Protože prvek $B_{11} = D_1 > 0$ je nenulový, přičítáním vhodného násobku prvního řádku resp. prvního sloupce vynulujeme všechny prvky prvního sloupce resp. prvního řádku kromě B_{11}. Vzniklou matici označme B'; je kongruentní s původní maticí B. Žádná z uvedených úprav nemění hodnotu determinantů $D_1, \dots, D_n$ (všechny obsahují odpovídající část prvního řádku a prvního sloupce). Pak tedy $0 < D_2 = D_1 B'_{22}$, načež i $B'_{22} > 0$. Přičítáním vhodných násobků druhého řádku resp. druhého sloupce poté anulujeme druhý sloupec resp. druhý řádek kromě B'_{22}; vznikne matice B'', která je opět kongruentní s B a podobně jako předtím se nezmění hodnoty determinantů $D_1, \dots, D_n$ a máme $0 < D_3 = D_2 B''_{33}$, načež $B''_{33} > 0$. Pokračujeme-li v podobném postupu, obdržíme nakonec diagonální matici s kladnými prvky na diagonále, kongruentní s maticí původní. Dokončením převodu na kanonický tvar (dělením sloupců a řádků prvky $1/\sqrt{B_{ii}}$) pak dostaneme přímo jednotkovou matici.