Matematický ústav Slezské univerzity v Opavě
Učební texty k přednášce ALGEBRA II, letní semestr 2000/2001
Michal Marvan

14. Vlastní vektory

Buď V vektorový prostor nad polem P. Lineární zobrazení $f : V \to V$ nazveme *lineární transformace* vektorového prostoru V nebo též *lineární operátor* na vektorovém prostoru V. Každý vektor $v \in V$ se pak zobrazí na některý vektor $f(v)$ z téhož prostoru V. Může se stát, že obraz $f(v)$ je násobkem vektoru v. Případ $v = 0$ je ovšem triviální.

Definice. Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ se nazývá *vlastní vektor* lineární transformace $f : V \to V$, když

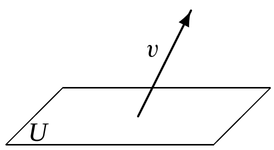
$$f(v) = \lambda v$$

pro některý skalár $\lambda \in P$. Skalár λ se nazývá *vlastní hodnota* příslušná vlastnímu vektoru v. V případě číselného pole P (podpole v poli $\mathbf{C}$) se λ nazývá *vlastní číslo*.

Příklad. (1) Identická transformace $\mathrm{id} : V \to V$, $\mathrm{id}(v) = v$. Každý vektor $v \in V \setminus \{0\}$ je vlastní s vlastní hodnotou 1, protože $\mathrm{id}(v) = 1 \cdot v$.

(2) Násobení skalárem $c \in P$ je transformace $f_c : V \to V$, $f_c(v) = cv$. Každý vektor $v \in V \setminus \{0\}$ je vlastní s vlastní hodnotou c.

(3) Rovnoběžné promítání $E^3 \to E^3$ podél vektoru $v \neq 0$ na rovinu $U \subset E^3$ procházející počátkem, $v \notin U$.



Vektor v a všechny jeho nenulové násobky jsou vlastní s vlastní hodnotou 0. Vektory $u \in U \setminus \{0\}$ jsou vlastní s vlastní hodnotou 1. Jiné vlastní vektory nejsou.

(4) Rotace $E^2 \to E^2$ o úhel $0 \le \phi < 2\pi$ je lineární transformace. Rozeznávejme tři případy:
(a) Je-li $\phi = 0$, pak jde o identickou transformaci a každý vektor $v \in E^2 \setminus \{0\}$ je vlastní s vlastní hodnotou 1;
(b) je-li $\phi = \pi$, pak jde o středovou symetrii $v \mapsto -v = (-1)v$ a každý vektor $v \in E^2 \setminus \{0\}$ je vlastní s vlastní hodnotou -1;
(c) v ostatních případech neexistuje žádný vlastní vektor.

(5) Rotace $E^3 \to E^3$ o úhel $0 \le \phi < 2\pi$ kolem zvolené pevné osy L procházející počátkem. Označme $L^\perp$ rovinu procházející počátkem kolmo k L. Rozeznávejme tři případy:
(a) Je-li $\phi = 0$, pak jde o identickou transformaci a každý vektor $v \in E^3 \setminus \{0\}$ je vlastní s vlastní hodnotou 1;
(b) je-li $\phi = \pi$, pak každý vektor $v \in L \setminus \{0\}$ je vlastní s vlastní hodnotou 1, každý vektor $v \in L^\perp \setminus \{0\}$ je vlastní s vlastní hodnotou -1 a žádný jiný vlastní vektor neexistuje;
(c) v ostatních případech každý vektor $v \in L \setminus \{0\}$ je vlastní s vlastní hodnotou 1 a žádný jiný vlastní vektor neexistuje.

Cvičení. Určete všechny vlastní vektory následujících lineárních transformací vektorového prostoru $\mathbf{C}$ nad $\mathbf{R}$. Návod: Pomozte si geometrickou interpretací v Gaussově rovině.

(1) Zobrazení $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $z \mapsto z^*$, kde z^* je číslo komplexně sdružené k číslu $z \in \mathbf{C}$.

(2) Zobrazení $\mathrm{re} : \mathbf{C} \to \mathbf{R}$, $z \mapsto \mathrm{re}\, z = \frac{1}{2}(z + z^*)$ (reálná část čísla z).

V uvedených příkladech (a) existuje jen konečně mnoho vlastních hodnot; (b) vlastní vektory příslušné jedné a téže vlastní hodnotě tvoří, po přidání nulového vektoru, podprostor ve V; (c) vlastní vektory příslušné různým vlastním hodnotám jsou lineárně nezávislé.

Tvrzení (a), (b) i (c) postupně dokážeme. Nejdříve tvrzení (b).

Tvrzení. *Buď $f : V \to V$ lineární transformace vektorového prostoru V nad polem P. Buď $\lambda \in P$ skalár. Označme*

$$V_\lambda = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}.$$

Pak (1) *V_λ je vektorový podprostor ve V;*

(2) *V_λ je nenulový podprostor právě tehdy, když λ je vlastní hodnota.*

Důkaz. (1) Cvičení. (2) Zřejmé.

Vidíme, že $V_\lambda \setminus 0$ je právě množina všech vlastních vektorů příslušných vlastní hodnotě λ.

Dále dokážeme tvrzení (c).

Tvrzení. *Buďte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vlastní hodnoty lineární transformace $f : V \to V$ vektorového prostoru V nad polem P. Buďte $v_1, \dots, v_n$ nějaké vlastní vektory, příslušné po řadě vlastním hodnotám $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Pak jsou vektory $v_1, \dots, v_n$ lineárně nezávislé.*

Důkaz. Nechť $x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n = 0$ pro nějaké skaláry $x_1, \dots, x_n \in P$. Aplikujme transformaci f:

$$\begin{aligned} 0 = f(0) &= f(x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n) = x_1 f(v_1) + \cdots + x_n f(v_n) \\ &= x_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + x_n \lambda_n v_n. \end{aligned}$$

Aplikujme transformaci f ještě jednou:

$$\begin{aligned} 0 = f(0) &= f(x_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + x_n \lambda_n v_n) = x_1 \lambda_1 f(v_1) + \cdots + x_n \lambda_n f(v_n) \\ &= x_1 \lambda_1^2 v_1 + \cdots + x_n \lambda_n^2 v_n. \end{aligned}$$

Postupně tak dostáváme rovnosti $0 = x_1 \lambda_1^i v_1 + \cdots + x_n \lambda_n^i v_n$ pro všechna $i \in \mathbf{N}$. Omezíme-li se na $i = 0, 1, \dots, n-1$, můžeme na tyto rovnosti pohlížet jako na soustavu n homogenních lineárních rovnic o n neznámých $x_1 v_1, \dots, x_n v_n$. Determinant této soustavy je tzv. *Vandermondův determinant*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (\lambda_j - \lambda_i).$$

Protože vlastní hodnoty λ_i jsou navzájem různé, jsou všechny rozdíly $\lambda_j - \lambda_i$ nenulové, takže nenulový je i jejich součin, potažmo determinant naší soustavy. Tudíž, soustava má jen triviální řešení $x_1 v_1 = 0, \dots, x_n v_n = 0$. Ale vektory $v_1, \dots, v_n$ jsou nenulové, takže $x_1 = 0$, $\dots, x_n = 0$.

Cvičení. Dokažte vztah pro Vandermondův determinant uvedený v předcházejícím důkazu.

Návod: Počínaje zdola, od každého řádku (kromě prvního) odečtěte λ_1-násobek předchozího řádku. Tím se v prvním sloupci vynulují všechny pozice kromě první a podle věty o Laplaceově rozvoji je determinant roven svému minoru vzniklému vyškrtnutím prvního řádku a prvního sloupce. Z j-tého sloupce tohoto minoru lze vytknout $(\lambda_j - \lambda_1)$, načež vzniklý determinant řádu $n-1$ je opět Vandermondův determinant.

Podejme návod k výpočtu vlastních čísel a vlastních vektorů v případě $\dim V = n < \infty$. Buď $e_1, \dots, e_n$ nějaká báze ve V. Vektory z V jsou jednoznačně určeny svými souřadnicemi, lineární zobrazení $f : V \to V$ je zase dáno svou maticí A, vše vzhledem k bázi $e_1, \dots, e_n$. Obraz $f(v)$ vektoru v o souřadnicích $x = (x_1, \dots, x_n)$ má souřadnice dané součinem matic Ax.

Podmínka, že x jsou souřadnice vlastního vektoru s vlastní hodnotou λ potom zní

$$Ax = \lambda x.$$

Ekvivalentně,

$$(A - \lambda E)x = 0, \tag{$*$}$$

kde E je jednotková matice. Rovnice $(*)$ představuje homogenní soustavu n lineárních rovnic s maticí $A - \lambda E$. Vlastní vektory (jejich souřadnice) jsou právě nenulová řešení této soustavy. Homogenní soustava však má řešení jen tehdy, je-li matice soustavy nesingulární, tj. tehdy, je-li determinant soustavy nulový:

$$\det(A - \lambda E) = 0. \tag{$**$}$$

To je současně podmínka, že skalár λ je vlastní hodnota. Tudíž, vlastní hodnoty jsou právě řešení rovnice $(**)$.

Rovnice $(**)$ se nazývá *charakteristická rovnice* matice A. Levá strana

$$\chi_A = \det(A - \lambda E)$$

je polynom n-tého stupně v λ, nazývá se *charakteristický polynom* matice A.

Shrňme: Vlastní hodnoty vypočteme jako kořeny charakteristického polynomu. Vlastní vektory se potom získají jako (nenulová) řešení soustavy $(*)$ pro jednotlivé vlastní hodnoty λ.

Cvičení. Určete vlastní vektory matice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Výsledky: Charakteristické hodnoty jsou $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Příslušné vlastní vektory jsou $v_1 = (1, 0, -1)$, $v_2 = (1, 1, -1)$, $v_3 = (0, -1, 1)$ a jejich nenulové násobky.

Tvrzení. *Lineární transformace $f : V \to V$ vektorového prostoru V konečné dimenze n nad polem P má nejvýše n různých vlastních čísel.*

Důkaz. Charakteristický polynom je stupně n a proto má nejvýše n různých kořenů.

Cvičení. Buď $\chi_A = c_n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_0$ charakteristický polynom matice A typu n/n. Ukažte, že $c_n = (-1)^n$, $c_{n-1} = -(-1)^n \operatorname{tr} A$ a $c_0 = \det A$.

Zabývejme se nyní otázkou, jak závisí charakteristický polynom na volbě báze $e_1, \dots, e_n$. Buď $e'_1, \dots, e'_n$ jiná báze ve V, buď Q příslušná matice přechodu. Jak víme, zobrazení f má v nové bázi matici $A' = Q^{-1}AQ$.

Vztah $A' = Q^{-1}AQ$ mezi maticemi lineárni transformace v různých bazích je konkrétní případ tzv. podobnosti matic:

Definice. Buďte A, B čtvercové matice. Říkáme, že matice B je *podobná* matici A, jestliže existuje invertibilní matice Q taková, že $B = Q^{-1}AQ$. Zapisujeme $B \approx A$.

Zobrazení $A \mapsto Q^{-1}AQ$ se nazývá *podobnostní transformace*.

Cvičení. Relace $\approx$ je relace ekvivalence. Dokažte.

Tvrzení. *Podobné matice mají tytéž charakteristické polynomy.*

Důkaz. Je-li $B = Q^{-1}AQ$, pak

$$\begin{aligned}\chi_B &= \det(B - \lambda E) = \det(Q^{-1}AQ - \lambda E) = \det\bigl(Q^{-1}(A - \lambda E)Q\bigr)\\ &= \det Q^{-1} \cdot \det(A - \lambda E) \cdot \det Q = \frac{1}{\det Q} \cdot \det(A - \lambda E) \cdot \det Q\\ &= \det(A - \lambda E) = \chi_A.\end{aligned}$$

Důsledek. *Charakteristický polynom lineárního zobrazení nezávisí na volbě báze.*

Cvičení. Ukažte, že matice

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

si nejsou podobné. Návod: vypočtěte charakteristické polynomy.

Tudíž, každá lineární transformace $f : V \to V$ konečněrozměrného vektorového prostoru V má jednoznačně určený *charakteristický polynom*, který označíme χ_f. Je roven charakteristickému polynomu χ_A matice A lineárního zobrazení f v libovolně zvolené bázi.

Tvrzení. *Nechť má charakteristický polynom χ_f lineární transformace $f : V \to V$ právě n různých kořenů $\xi_1, \dots, \xi_n$, kde $n = \dim V$. Nechť jsou $v_1, \dots, v_n$ vlastní vektory příslušné po řadě vlastním hodnotám $\xi_1, \dots, \xi_n$. Pak vektory $v_1, \dots, v_n$ tvoří bázi prostoru V. Transformace f má v této bázi diagonální matici*

$$\begin{pmatrix}\xi_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \xi_2 & \cdots & 0\\ & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \xi_n\end{pmatrix}.$$

Důkaz. Vektory $v_1, \dots, v_n$ jsou lineárně nezávislé, protože přísluší různým vlastním hodnotám. Jejich lineární obal $[\![v_1, \dots, v_n]\!]$ je n-rozměrný podprostor n-rozměrného prostoru V. Tudíž, $[\![v_1, \dots, v_n]\!] = V$ a $v_1, \dots, v_n$ je báze ve V. Matici transformace v této bázi získáme z vyjádření $f(v_i) = \xi_i v$.

Lineární transformace, která splňuje podmínky předchozího tvrzení, se nazývá *diagonalizovatelná*.

Důsledek. *Nechť má charakteristický polynom χ_A matice A typu n/n právě n různých kořenů $\xi_1, \dots, \xi_n$. Pak je matice A podobná diagonální matici*

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \xi_2 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \xi_n \end{pmatrix}.$$

Matice podobná diagonální matici se nazývá *diagonalizovatelná*.

Příklad. Matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

je diagonalizovatelná.

V jednom z předchozích cvičení jsme totiž ukázali, že A má tři různé vlastní hodnoty 1, 2, 3. Příslušný diagonální tvar je

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Platí vztah $D = Q^{-1}AQ$, kde

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

je matice přechodu od báze $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ prostoru $\mathbf{R}^3$ k bázi $(1, 0, -1)$, $(1, 1, -1)$, $(0, -1, 1)$, složené z vlastních vektorů matice A. (Ověřte.)

Cvičení. Uvažujme o zrcadlení ζ v prostoru E^3 vzhledem k rovině U procházející počátkem 0. Ukažte, že zobrazení ζ je diagonalizovatelné.

Návod: Vyberte bázi tak, aby vektory e_1, e_2 ležely v rovině U a vektor e_3 byl k rovině U kolmý.