Matematický ústav Slezské univerzity v Opavě
Učební texty k přednášce ALGEBRA II, letní semestr 2000/2001
Michal Marvan

13. Matice lineárního zobrazení

V této přednášce budeme používat indexy dvojího druhu: horní a dolní. *Horní index* je index zapsaný v pozici exponentu. Horní indexy se zpravidla používají jen v situacích, kdy nemůže dojít k záměnám s mocninami, například když se mocniny v daném kontextu vůbec nevyskytují. Horním indexem budeme označovat zejména souřadnice vektorů.

Dohoda. V maticích bude řádkový index vždy horní a sloupcový index vždy dolní.

Například A_{ij} zapíšeme jako A^i_j. Vzorec pro součin matic $C = AB$ pak bude mít tvar

$$C^k_l = \sum_{i=1}^{n} A^k_i B^i_l,$$

kde n je počet sloupců matice A = počet řádků matice B. Protože meze $1, \dots, n$ sčítacího indexu i jsou spolehlivě určeny kontextem, budeme zjednodušeně psát

$$C^k_l = \sum_i A^k_i B^i_l.$$

Zapamatujte si: *Ve vzorci pro násobení matic je první výskyt sčítacího indexu dole, druhý nahoře.*

Příklad. (1) Zápis $C^k_l = \sum_i A^i_l B^k_i$ znamená, že $C = BA$. Vskutku, zaměnímeli součinitele tak, aby první výskyt sčítacího indexu byl dole, dostaneme $C^k_l = \sum_i B^k_i A^i_l$.

(2) Buď A čtvercová matice. Pak $T = \sum_i A^i_i$ je součet prvků na diagonále; nazývá se *stopa* matice A.

(3) Symbol δ^i_j označuje tzv. Kroneckerovo delta. Definuje se předpisem

$$\delta^j_i := \begin{cases} 1 & \text{když } i = j, \\ 0 & \text{když } i \neq j. \end{cases}$$

Čtvercová matice s prvky δ^i_j je jednotková matice.

Cvičení. Ukažte, že $\sum_j A^i_j \delta^j_k = A^i_k$.

Ve fyzice a diferenciální geometrii se často používá *Einsteinovo sumační pravidlo*. Podle něj se index, např. i, který se v nějakém výrazu vyskytuje v horní i dolní pozici, považuje za index sčítací. Takový výraz se chápe, jako kdyby před ním stál symbol $\sum_i$ kde i probíhá celou množinu přípustných hodnot určenou kontextem nebo dohodou. Při použití Einsteinova sumačního pravidla je shora uvedený vzorec pro součin matic ještě jednodušší: $C^k_l = A^k_i B^i_l$. Zde i je sčítací index, protože se jednou vyskytuje v horní a jednou v dolní pozici.

Horní indexy a sumační pravidla představují všeobecně užitečnou alternativu k maticovému zápisu. V této přednášce budeme horní indexy používat především tam, kde to usnadní orientaci ve výpočtech, Einsteinovo sumační pravidlo používat nebudeme.

1. Souřadnice vektorů

Dohoda. Souřadnice vektorů budeme zapisovat s horními indexy.

Buď U nějaký n-rozměrný vektorový prostor nad polem P. Buď $e_1, \dots, e_n$ nějaká báze v U, buď $u \in U$ libovolný vektor. Pak jsou $x^1, \dots, x^n$ souřadnice vektoru u v bázi $e_1, \dots, e_n$ právě tehdy, když platí rovnost

$$u = \sum_i x^i e_i$$

(i je sčítací index; kontextem je určeno, že probíhá množinu $\{1, \dots, n\}$). Připomeňme, že touto formulí jsou souřadnice $x^1, \dots, x^n$ vektoru u jednoznačně určeny a že přiřazení $u \mapsto (x^1, \dots, x^n)$ je izomorfismus vektorových prostorů $U \cong P^n$.

Toto přiřazení je *závislé na volbě báze*, a proto vektory a jejich souřadnice je nutno striktně rozlišovat. Často používaný zápis $u = (x^1, \dots, x^n)$ dává smysl jen při určité volbě báze a mění se s každou změnou báze. Je za ním vždy nutno vidět formuli $u = x^i e_i$.

V maticových zápisech budeme $x = (x^1, \dots, x^n)$ považovat za matici o jednom sloupci (ve shodě s pravidlem, že horní index je řádkový) a nazývat prostě *sloupec souřadnic*.

2. Matice lineárního zobrazení

Definice. Buď dán n-rozměrný vektorový prostor U s bazí $e_1, \dots, e_n$ a m-rozměrný vektorový prostor V s bazí $f_1, \dots, f_m$. Buď $\alpha : U \to V$ lineární zobrazení. Matice A typu m/n, jejíž i-tý sloupec je tvořen souřadnicemi vektoru $\alpha(e_i) \in V$ v bázi $f_1, \dots, f_m$, se nazývá *matice lineárního zobrazení* α vzhledem k bazím $e_1, \dots, e_n$ a $f_1, \dots, f_m$.

Přesněji, A_i^j je souřadnice obrazu $\alpha(e_i)$ v bázi $f_1, \dots, f_m$. Platí tedy

$$\alpha(e_i) = \sum_j A_i^j f_j$$

(připomeňme, že horní index matic je řádkový a dolní je sloupcový).

Tvrzení. *Buď $u \in U$ vektor, $x = (x^1, \dots, x^n) \in P^n$ sloupec jeho souřadnic v bázi $e_1, \dots, e_n$ prostoru U. Buď $v = \alpha(u) \in V$ obraz vektoru u, $y = (y^1, \dots, y^m) \in P^m$ sloupec jeho souřadnic v bázi $f_1, \dots, f_m$ prostoru V. Pak platí*

$$y = Ax.$$

Důkaz. Máme $u = \sum_i x^i e_i$, načež $v = \alpha(u) = \alpha(\sum_i x^i e_i) = \sum_i \alpha(x^i e_i) = \sum_i x^i \alpha(e_i) = \sum_{i,j} x^i A_i^j f_j$. Odtud plyne, že souřadnice vektoru v v bázi $f_1, \dots, f_m$ jsou $\sum_i x^i A_i^j$, to jest, $y^j = \sum_i x^i A_i^j$. V poslední formuli nyní stačí zaměnit pořadí součinitelů tak, aby poloha sčítacího indexu odpovídala násobení matic, tj. $y^j = A_i^j x^i$.

Příklad. Buďte U, V trojrozměrné vektorové prostory s bazemi e_1, e_2, e_3 a f_1, f_2, f_3. Nechť je lineární zobrazení α dáno předpisem

$$\alpha(e_1) = f_2 + f_3, \qquad \alpha(e_2) = -f_1 + f_3, \qquad \alpha(e_3) = 2 f_2.$$

Souřadnice obrazů $\alpha(e_i)$ v bázi $f_1,\ f_2,\ f_3$ jsou po řadě $(0, 1, 1)$, $(-1, 0, 1)$, $(0, 2, 0)$ (ověřte). Matice A je

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Obrazem vektoru se souřadnicemi (x^1, x^2, x^3) je vektor

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^2 \\ x_1 + 2x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

Zkouška správnosti: Obrazem vektoru e_1 se souřadnicemi $(1, 0, 0)$ musí být vektor $f_2 + f_3$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zkouška vyšla.

Příklad. Uvažujme o rovnoběžném promítání $\pi : E^3 \to E^2$ podél vektoru $w \notin E^2$. Zvolme libovolnou bázi $u, v \in E^2$. Pak je u, v, w báze v E^3 (proč?). Lineární zobrazení π splňuje

$$\alpha(u) = u, \qquad \alpha(v) = v, \qquad \alpha(w) = 0.$$

Souřadnice těchto obrazů v bázi u, v, w jsou po řadě $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 0)$. Matice zobrazení π vzhledem k bazím u, v, w a u, v je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Obraz vektoru se souřadnicemi (x, y, z) je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(ztrácí se souřadnice měřená podél vektoru w).

Zjistěme, jaká operace s maticemi odpovídá skládání lineárních zobrazení.

Tvrzení. *Buď U vektorový prostor s bazí $e_1, \dots, e_m$, buď V vektorový prostor s bazí $f_1, \dots, f_n$, buď W vektorový prostor s bazí $g_1, \dots, g_p$. Buďte $\alpha : U \to V$, $\beta : V \to W$ lineární zobrazení. Buď A matice zobrazení α vzhledem k bazím $e_1, \dots, e_m$ a $f_1, \dots, f_n$, buď B matice zobrazení β vzhledem k bazím $f_1, \dots, f_n$ a $g_1, \dots, g_p$.*

Pak je součin BA maticí zobrazení $\beta \circ \alpha$ vzhledem k bazím $e_1, \dots, e_m$ a $g_1, \dots, g_p$.

Důkaz. Máme $\alpha(e_i) = \sum_i A_i^j f_j$. Dále $\beta(f_j) = \sum_j B_j^k g_k$. Tudíž,

$$(\beta \circ \alpha)(e_i) = \beta(\alpha(e_i)) = \beta\Big(\sum_j A_i^j f_j\Big) = \sum_j A_i^j \beta(f_j) = \sum_j A_i^j \sum_k B_j^k g_k$$
$$= \sum_{j,k} A_i^j B_j^k g_k,$$

a proto je matice zobrazení $\beta \circ \alpha$ rovna $\sum_j A_i^j B_j^k = \sum_j B_j^k A_i^j$, což je součin BA.

Tvrzení. *Při stejném označení jako v předchozím tvrzení, nechť je α izomorfismus (a potom $m = n$). Pak je matice A invertibilní a A^{-1} je matice inverzního lineárního zobrazení $\alpha^{-1} : V \to U$.*

Důkaz. Buď B matice lineárního zobrazení $\alpha^{-1} : V \to U$ vzhledem k příslušným bazím. Podle předchozího tvrzení je BA matice lineárního zobrazení $\alpha^{-1} \circ \alpha = \mathrm{id}$ vzhledem k bázi $e_1, \dots, e_m$, což je jednotková matice. Tudíž, $BA = E$. Analogicky $AB = E$ a důkaz je hotov.

3. Matice přechodu

Buď opět dán n-rozměrný vektorový prostor U nad polem P. Buď $e_1, \dots, e_n$ nějaká báze v U, nazvěme ji *stará báze*. Buď $e'_1, \dots, e'_n$ jiná báze v U, nazvěme ji *nová báze*. Buď $u \in U$ libovolný vektor. Souřadnice vektoru u ve staré bázi $e_1, \dots, e_n$ označme $x = (x^1, \dots, x^n) \in P^n$ a říkejme jim *staré souřadnice*. Souřadnice vektoru u v nové bázi $e'_1, \dots, e'_n$ označme $x' = (x'^1, \dots, x'^n) \in P^n$ a říkejme jim *nové souřadnice*. (Platí tedy $u = \sum_i x^i e_i = \sum_i x'^i e'_i$.)

Zajímá nás vztah mezi starými a novými souřadnicemi x a x'. Vektory nové báze mohou být zadány svými souřadnicemi ve staré bázi.

Definice. Matice Q, jejíž sloupce jsou tvořeny starými souřadnicemi nových bázových vektorů, se nazývá *matice přechodu* (od staré báze k nové bázi).

Máme tedy

$$\mathrm{id}(e'_i) = e'_i = \sum_j Q^j_i e_j.$$

Odtud okamžitě plyne

Tvrzení. *Matice přechodu od báze $e_1, \dots, e_n$ k bázi $e'_1, \dots, e'_n$ je totožná s maticí identického zobrazení* id : $V \to V$ *vzhledem k bazím $e'_1, \dots, e'_n$ a $e_1, \dots, e_n$ (v tomto pořadí!).*

Důsledek. (1) *Matice přechodu je vždy invertibilní.*

(2) *Označují-li x resp. x' sloupce starých resp. nových souřadnic, pak nové souřadnice závisí na starých souřadnicích vztahem*

$$x' = Q^{-1} x.$$

Důkaz. (1) Tvrzení je důsledkem předchozích, protože identické zobrazení je izomorfismus.

(2) Platí $x = Qx'$, načež $x' = Q^{-1}Qx' = Q^{-1}x$.

Příklad. Nechť $e'_1 = e_1 - e_2$ a $e'_2 = 2e_2$. Staré souřadnice nové báze jsou $(1, -1)$, $(0, 2)$. Matice přechodu a matice k ni inverzní jsou

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Vektor se starými souřadnicemi $x = (x^1, x^2)$ má nové souřadnice

$$x' = Q^{-1}x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2 \end{pmatrix}.$$

Zkouška správnosti: vektor e'_1 musí mít nové souřadnice $(1, 0)$ a vektor e'_2 musí mít nové souřadnice $(0, 1)$. Ověřte.

4. Změna matice lineárního zobrazení při změnách bazí

Tvrzení. *Buď U vektorový prostor se starou bazí $e_1, \dots, e_n$ a novou bazí $e'_1, \dots, e'_n$, matice přechodu od staré k nové bázi buď Q. Buď V vektorový prostor se starou bazí $f_1, \dots, f_m$ a novou bazí $f'_1, \dots, f'_m$, matice přechodu od staré k nové bázi buď R. Buď $\alpha : U \to V$ lineární zobrazení. Buď A matice lineárního zobrazení α vzhledem k bazím $e_1, \dots, e_n$, $f_1, \dots, f_m$. Buď A' matice lineárního zobrazení α vzhledem k bazím $e'_1, \dots, e'_n$, $f'_1, \dots, f'_m$. Pak platí*

$$A' = R^{-1}AQ.$$

Důkaz. Situaci můžeme znázornit diagramem

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{array}{c} U \\ e_1,\dots,e_n \end{array}} \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\alpha"'] & \boxed{\begin{array}{c} U \\ e'_1,\dots,e'_n \end{array}} \arrow[d, "\alpha"] \\
\boxed{\begin{array}{c} V \\ f_1,\dots,f_m \end{array}} \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \boxed{\begin{array}{c} V \\ f'_1,\dots,f'_m \end{array}}
\end{tikzcd}$$

V rozích stojí vektorové prostory s vyznačenou bazí, šipky označují lineární zobrazení. Jednotlivá zobrazení pak mají matice

$\mathrm{id} : U \to U$	Q^{-1}
α v levém sloupci	A
$\mathrm{id} : V \to V$	R^{-1}
α v pravém sloupci	A'.

Platí $\alpha \circ \mathrm{id} = \mathrm{id} \circ \alpha$, odtud podle tvrzení o matici složeného zobrazení plyne rovnost

$$A'Q^{-1} = R^{-1}A.$$

Po vynásobení obou stran maticí Q zprava získáme tvrzení.