Matematický ústav Slezské univerzity v Opavě
Učební texty k přednášce ALGEBRA II, letní semestr 2000/2001
Michal Marvan

10. Vektorové podprostory

Definice. Buď V vektorový prostor nad polem P. Podmnožina $U \subseteq V$ se nazývá *podprostor*, jestliže platí
(i) $0 \in U$;
(ii) $a + b \in U$ pro každé dva vektory $a, b \in U$ (uzavřenost na sčítání);
(iii) $ra \in U$ pro každý vektor $a \in U$ a každý skalár $r \in P$ (uzavřenost na násobení skalárem).

Podle (iii), pro každý vektor $u \in U$ máme $-u = (-1) \cdot u \in U$, a to znamená, že s každým vektorem leží v U i vektor k němu opačný. To spolu s (i) a (ii) znamená, že takový podprostor je podgrupa abelovské grupy $(V, +, 0, -)$.

Axiomy vektorového prostoru jsou splněny na V a tím spíše na U (cvičení). Tudíž, podobně jako u ostatních algebraických podstruktur, podprostor je sám též vektorovým prostorem.

Příklad. (1) Každý vektorový prostor je sám svým podprostorem.
(2) Nulový prostor je podprostorem každého vektorového prostoru.
(3) $\mathbf{R}$ je podprostorem vektorového prostoru $\mathbf{C}$ nad polem $\mathbf{R}$ (ověřte).
(4) $\{(a, 0) \mid a \in \mathbf{R}\}$ je podprostorem vektorového prostoru $\mathbf{R}^2$ nad polem $\mathbf{R}$ (ověřte).

Mnoho dalších příkladů můžeme získat jako tzv. lineární obaly.

Definice. Buďte $u_1, u_2, \dots, u_n$ libovolné vektory vektorového prostoru V nad polem P. Označme $[\![u_1, u_2, \dots, u_n]\!]$ množinu všech P-lineárních kombinací vektorů $u_1, u_2, \dots, u_n$:

$$[\![u_1, u_2, \dots, u_n]\!] = \{x_1 u_1 + \dots + x_n u_n \mid x_1, \dots, x_n \in P\}.$$

Tvrzení. *Buďte $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$ libovolné vektory z vektorového prostoru V. Pak platí:*
(1) *Lineární obal $[\![u_1, u_2, \dots, u_n]\!]$ je podprostorem ve V.*
(2) *Je-li $U \subseteq V$ podprostor obsahující vektory $u_1, u_2, \dots, u_n$, pak $[\![u_1, u_2, \dots, u_n]\!] \subseteq U$.*

Důkaz. (1) Stačí ukázat, že množina $[\![u_1, u_2, \dots, u_n]\!]$ splňuje podmínky (i) – (iii) z definice vektorového prostoru. Podmínka (i): $0 = 0u_1 + \dots + 0u_n \in [\![u_1, u_2, \dots, u_n]\!]$. Podmínka (ii): Je-li $a, b \in [\![u_1, u_2, \dots, u_n]\!]$, pak $a = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$ a $b = y_1 u_1 + \dots + y_n u_n$ pro vhodné koeficienty $x_i, y_i \in P$, načež $a + b = (x_1 + y_1)u_1 + \dots + (x_n + y_n)u_n \in [\![u_1, u_2, \dots, u_n]\!]$, protože $x_1 + y_1 \in P, \dots, x_n + y_n \in P$. Podmínka (iii): Cvičení.

(2) Nechť $u_1, u_2, \dots, u_n \in U$. Každý prvek z $[\![u_1, \dots, u_n]\!]$ je nějaká lineární kombinace

$$x_1 u_1 + \dots + x_n u_n.$$

Každý z prvků u_i leží v U, proto i násobky $x_i u_i$ leží v U, a nakonec i jejich součet leží v U. Poslední fakt je pro $n \le 2$ přímým důsledkem podmínky (ii) z definice podprostoru; pro vyšší n se snadno dokáže indukcí (cvičení).

Tudíž, $[\![u_1, \dots, u_n]\!]$ je nejmenší podprostor ve V obsahující vektory $u_1, \dots, u_n$.

Tvrzení. *Libovolný podprostor konečněrozměrného vektorového prostoru je konečněrozměrný.*

Důkaz. Buď V konečněrozměrný prostor, $\dim V = N$, buď $U \subseteq V$ podprostor. Zkonstruujeme bázi postupem, který jsme použili při doplňování lineárně nezávislé množiny vektorů do báze.

0-tý krok: Je-li U nulový prostor, jsme hotovi (U je 0-rozměrný).

1-ní krok: Když $U \neq \{0\}$, pak existuje vektor $u_1 \in U \setminus \{0\}$. Uvažujme o podprostoru $[\![u_1]\!]$. Je-li $U = [\![u_1]\!]$, pak jsme hotovi (U je 1-rozměrný).

k-tý krok: Když $U \neq [\![u_1, \dots, u_{k-1}]\!]$, pak existuje vektor $u_k \in U \setminus [\![u_1, \dots, u_{k-1}]\!]$. Je-li $[\![u_1, \dots, u_k]\!]$, pak jsme hotovi (U je k-rozměrný).

Procedura skončí, jakmile narazíme na rovnost $U = [\![u_1, u_2, \dots, u_r]\!]$ pro nějaké r; to se zcela jistě stane. Vskutku, vektory $u_1, u_2, \dots, u_r$ jsou lineárně nezávislé, protože žádný z nich není lineární kombinací předchozích (podle konstrukce $u_i \notin [\![u_1, u_2, \dots, u_{i-1}]\!]$). Nezávislých vektorů však nikdy není více než generátorů, tudíž $r \leq N$.

Důsledek. Vektorový prostor, který obsahuje alespoň jeden nekonečněrozměrný podprostor, je nekonečněrozměrný.

Cvičení. Uvažujme například o prostoru $C^r\mathbf{R}$ všech funkcí $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, spojitých se všemi derivacemi až do řádu r včetně. Prostor $C^r\mathbf{R}$ je nekonečněrozměrný, protože obsahuje podprostor polynomů $\mathbf{R}[x]$, který je nekonečněrozměrný.

Následující tvrzení se často hodí při důkazech.

Tvrzení. *Buď V konečněrozměrný vektorový prostor, buď $U \subseteq V$ jeho podprostor. Nechť $\dim U = \dim V$. Pak $U = V$.*

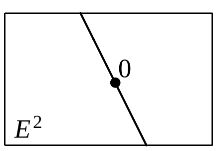
Důkaz. Buď $u_1, \dots, u_n$ báze v U. Připusťme, že existuje vektor $v \in V \setminus U$. V n-rozměrném prostoru U pak máme $n + 1$ nezávislých vektorů $u_1, \dots, u_n, v$ (žádný z nich není lineární kombinací předchozích: vektory u_i protože jsou bázové, vektor v proto, že jinak by ležel v U). To je spor, a tedy $V = U$.

Příklad. Podprostory U prostoru E^2 jsou:

(1) nulový podprostor $\{0\}$;

(2) kterákoliv přímka $L \subset E^2$ procházející počátkem (přesněji, množina všech vektorů, které při umístění v počátku celé leží v přímce L);

(3) celý prostor E^2.



Skutečně, je-li U podprostor v E^2, pak mohou nastat následující případy:

(1) U obsahuje jen nulový vektor, načež U je nulový podprostor. Jinak U obsahuje alespoň jeden nenulový vektor u a mohou nastat dva případy:

(2) všechny vektory z U jsou násobky u, načež U je přímka procházející počátkem;

(3) existuje vektor u' nezávislý na u, načež u, u' tvoří bázi ve dvourozměrném prostoru E^2 a $U = E^2$ podle předchozího tvrzení.

Příklad. Podobně v trojrozměrném prostoru E^3 jsou podprostory
(1) nulový podprostor $\{0\}$;
(2) kterákoliv přímka $L \subset E^2$ procházející počátkem;
(3) kterákoliv rovina $R \subset E^3$ procházející počátkem;
(4) celý prostor E^3.

Průniky a součty podprostorů

Tvrzení. *Buďte $U', U'' \subseteq V$ podprostory vektorového prostoru V. Pak je průnik $U' \cap U''$ též podprostor.*

Důkaz. Ověřme podmínky (i) – (iii). Podmínka (i): $0 \in U' \cap U''$, protože $0 \in U'$ a $0 \in U''$. Podmínka (ii): Nechť $a, b \in U' \cap U''$. Pak $a, b \in U'$, takže $a + b \in U'$. Podobně $a, b \in U''$, takže $a + b \in U''$. Tudíž, $a + b \in U' \cap U''$. Podmínka (iii): Cvičení.

Definice. Buďte U', U'' dva podprostory vektorového prostoru V. Označme

$$U' + U'' = \{u' + u'' \mid u' \in U',\ u'' \in U''\}.$$

Množina $U' + U''$ se nazývá *součet* podprostorů U' a U''.

Prvky množiny $U' + U''$ jsou všechny vektory $u \in V$, pro něž existuje vyjádření $u = u' + u''$, kde $u' \in U'$ a $u'' \in U''$.

Tvrzení. *Buďte $U', U'' \subseteq V$ podprostory. Pak je $U' + U''$ podprostor ve V.*

Důkaz. Podmínka (i): $0 = 0 + 0 \in U' + U''$, kde $0 \in U'$ a $0 \in U''$. Podmínka (ii): Nechť $a, b \in U' + U''$. Pak $a = a' + a''$ a $b = b' + b''$, kde $a', b' \in U'$, $a'', b'' \in U''$, načež $a + b = a' + a'' + b' + b'' = (a' + b') + (a'' + b'') \in U' + U''$. Podmínka (iii): Cvičení.

Cvičení. Dokažte, že (1) $U', U'' \subseteq U' + U''$.
(2) Je-li U nějaký podprostor ve V takový, že $U' \subseteq U$ a $U'' \subseteq U$, pak $U' + U'' \subseteq U$.
Návod: (1) Je-li $u' \in U'$ libovolný prvek, pak $u' = u' + 0 \in U' + U''$.
(2) Buď $u' + u''$ obecný vektor z $U' + U''$, $u' \in U'$, $u'' \in U''$. Protože $U', U'' \subseteq U$, máme $u', u'' \in U$, načež $u' + u'' \in U$.

Množina $S(V)$ všech podprostorů vektorového prstoru V je uspořádána inkluzí $\subseteq$. Z dokázaných tvrzení o průnicích a součtech podprostorů plyne, že množina $S(V)$ je svazově uspořádána, přičemž infimem je průnik a supremem je součet podprostorů. Tudíž, $(S(V), \cap, +)$ je svaz. (Tento svaz není obecně ani distributivní, ani komplementární.)

Tvrzení. *Buďte U', U'' podprostory vektorového prostoru V. Pak*

$$\dim U' + \dim U'' = \dim(U' + U'') + \dim(U' \cap U'').$$

Důkaz. Nechť $\dim U' = n'$, $\dim U'' = n''$, $\dim(U' \cap U'') = r$ a $\dim(U' + U'') = s$. Buď $u_1, \dots, u_r$ báze v $U' \cap U''$. To je jistě nezávislá množina vektorů v U' resp. v U'' a proto se dá v obou prostorech doplnit do báze vektory $u'_1, \dots, u'_{n'-r}$ resp. $u''_1, \dots, u''_{n''-r}$. Ukažme, že vektory $u_1, \dots, u_r, u'_1, \dots, u'_{n'-r}, u''_1, \dots, u''_{n''-r}$ tvoří bázi v $U' + U''$.

Vektory $u_1, \dots, u_r, u'_1, \dots, u'_{n'-r}, u''_1, \dots, u''_{n''-r}$ jsou nezávislé. Skutečně, nechť

$$c_1u_1 + \dots + c_ru_r + c'_1u'_1 + \dots + c'_{n'-r}u'_{n'-r} + c''_1u''_1 + \dots + c''_{n''-r}u''_{n''-r} = 0$$

pro nějaké skaláry $c_1, \dots, c_r, c'_1, \dots, c'_{n'-r}, c''_1, \dots, c''_{n''-r} \in P$. Pak

$$c_1u_1 + \dots + c_ru_r + c'_1u'_1 + \dots + c'_{n'-r}u'_{n'-r} = -c''_1u''_1 - \dots - c''_{n''-r}u''_{n''-r},$$

kde na levé straně stojí prvek z U' a na pravé stojí prvek z U'', ale protože jsou si rovny, leží vlastně v $U' \cap U''$, a lze je jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinace vektorů $u_1, \dots, u_r$. Vyjádřeme tak vektor na pravé straně: existují skaláry $x_1, \dots, x_r \in P$ takové, že

$$x_1u_1 + \dots + x_ru_r = -c''_1u''_1 - \dots - c''_{n''-r}u''_{n''-r}.$$

Z nezávislosti vektorů $u_1, \dots, u_r, u''_1, \dots, u''_{n''-r}$ (tvoří bázi v U'') pak okamžitě plyne, že $x_1 = \dots = x_r = c''_1 = \dots = c''_{n''-r} = 0$. Odtud

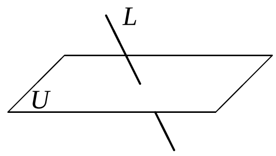
$$c_1u_1 + \dots + c_ru_r + c'_1u'_1 + \dots + c'_{n'-r}u'_{n'-r} = 0,$$

načež z podobných důvodů $c_1 = \dots = c_r = c'_1 = \dots = c'_{n'-r} = 0$, což dokazuje nezávislost.

Snadno se dokáže, že vektory $u_1, \dots, u_r, u'_1, \dots, u'_{n'-r}, u''_1, \dots, u''_{n''-r}$ generují $U' + U''$ (cvičení).

Nalezli jsme bázi v $U' + U''$ o $r + (n' - r) + (n'' - r) = n' + n'' - r$ vektorech. Tím je ověřeno, že $n' + n'' - r = s$ a důkaz je hotov.

Příklad. V prostoru E^3 buď $U \subset E^3$ nějaká rovina procházející počátkem a $L \subset E^3$ libovolná přímka procházející počátkem a neležící v U:



Pak U je podprostor a podobně L je podprostor, přičemž evidentně $U \cap L = \{0\}$. Proto $\dim(U + L) = \dim U + \dim L - \dim(U \cap L) = 2 + 1 - 0 = 3 = \dim E^3$. Tudíž, $E^3 = U + L$ a každý vektor $v \in E^3$ je součtem $v = u + l$, kde $u \in U$ a $l \in L$. Jak najdeme vektory u, l, je-li dán vektor v?

Cvičení. Buďte U', U'' podprostory v vektorovém prostoru V, nechť $\dim U' + \dim U'' > \dim V$. Ukažte, že existuje nenulový vektor $u \in U' \cap U''$.

Cvičení. Ukažte, že $[\![u_1, \dots, u_n]\!] + [\![v_1, \dots, v_m]\!] = [\![u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m]\!]$.

Definici součtu podprostorů lze snadno rozšířit na libovolný konečný počet sčítanců ≥ 2:

$$U_1 + \dots + U_n = \{u_1 + \dots + u_n \mid u_1 \in U_1, \dots, u_n \in U_n\}.$$

Vektor $v \in V$ tedy leží v $U_1 + \dots + U_n$ právě tehdy, když jej lze zapsat jako součet $v = u_1 + \dots + u_n$, přičemž $u_1 \in U_1, \dots, u_n \in U_n$.

Přímý součet podprostorů

Definice. Buď V vektorový prostor nad polem P, Buďte $U_1, \dots, U_n$ podprostory ve V. Součet $U_1 + \dots + U_n$ nazývá *přímý,* jestliže každý vektor $v \in U_1 + \dots + U_n$ lze zapsat *právě jedním způsobem* jako součet $v = u_1 + \dots + u_n$, kde $u_1 \in U_1, \dots, u_n \in U_n$. Přímý součet zapisujeme s tečkami: $U_1 \dotplus \dots \dotplus U_n$.

Příklad. Nechť $U_1 = \{(x, 0, 0) \mid x \in P\}$, $U_2 = \{(0, y, 0) \mid y \in P\}$, $U_3 = \{(0, 0, z) \mid z \in P\}$. Pak $P^3 = U_1 \dotplus U_2 \dotplus U_3$, protože libovolný vektor $u = (x, y, z) \in P$ má jediné vyjádření ve tvaru součtu $u = u_1 + u_2 + u_3$, kde $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2, u_3 \in U_3$, a sice $(x, y, z) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z)$.

Tvrzení. *Buďte U_1, U_2 dva podprostory vektorového prostoru V. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) $V = U_1 \dotplus U_2$;

(ii) $V = U_1 + U_2$, $U_1 \cap U_2 = 0$.

Důkaz. „(i) $\Rightarrow$ (ii)“: Z existence rozkladu $v = u_1 + u_2$ plyne, že $V = U_1 + U_2$. Ukažme, že $U_1 \cap U_2 = 0$. Buď tedy $u \in U_1 \cap U_2$. Pak máme dva rozklady vektoru u na sčítance z U_1 a U_2, a sice $u = 0 + u$ a $u = u + 0$. Totožnost obou rozkladů znamená, že $u = 0$.

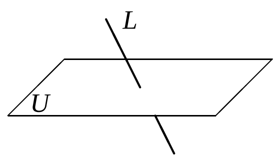
„(i) $\Leftarrow$ (ii)“: Existence vektorů u_1, u_2 plyne z definice součtu $U_1 + U_2$. Jednoznačnost dokážeme: Pokud je u'_1, u'_2 jiná dvojice vektorů taková, že $v = u'_1 + u'_2$, pak

$$0 = v - v = (u_1 - u'_1) + (u_2 - u'_2),$$

a tedy $u_1 - u'_1 = -(u_2 - u'_2)$. Vektor $u_1 - u'_1 \in U_1$ je roven vektoru $-(u_2 - u'_2) \in U_2$, a proto leží v průniku $U_1 \cap U_2$, což je nulový prostor. Tudíž, $u_1 - u'_1 = 0$ a $u_2 - u'_2 = 0$.

Příklad. (1) $V = V \dotplus 0$ pro libovolný vektorový prostor V.

(2) Prostor E^3 je přímým součtem $U \dotplus L$, je-li $U \subset E^3$ libovolná rovina procházející počátkem a $L \subset E^3$ libovolná přímka procházející počátkem a neležící v U:



V případě konečněrozměrných podprostorů máme jednoduché kriterium.

Tvrzení. *Buďte U_1, U_2 podprostory konečněrozměrného vektorového prostoru V, nechť $V = U_1 + U_2$. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní:*

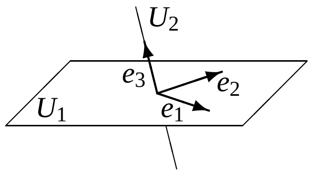
(i) $V = U_1 \dotplus U_2$;

(ii) $\dim V = \dim U_1 + \dim U_2$.

Důkaz. „(i) $\Rightarrow$ (ii)“: Máme $\dim V = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$.

„(i) $\Leftarrow$ (ii)“: Nechť $\dim V = \dim U_1 + \dim U_2$. Potom $\dim(U_1 \cap U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim V = 0$.

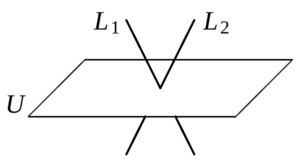
Cvičení. Buď $V = U_1 \dot{+} U_2$ přímý součet podprostorů, buď $e'_1, \dots, e'_{m_1}$ báze v podprostoru U_1, buď $e''_1, \dots, e''_{m_2}$ báze v podprostoru U_2. Pak je $e'_1, \dots, e'_{m_1}, e''_1, \dots, e''_{m_2}$ báze v prostoru V. Dokažte.



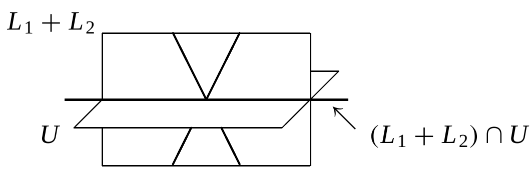
Cvičení. Buď $m < n$, buď $e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n$ nějaká báze vektorového prostoru V. Pak platí $V = \llbracket e_1, \dots, e_m \rrbracket \dot{+} \llbracket e_{m+1}, \dots, e_n \rrbracket$. Dokažte.

Vzniká otázka, jak jednoduše rozeznat přímý součet n podprostorů při $n > 2$. Mohlo by se zdát, že prostor V je přímým součtem podprostorů $U_1, \dots, U_n$, jestliže je jejich součtem a podprostory $U_1, \dots, U_n$ mají po dvou nulový průnik. Následující příklad ukazuje, že nic podobného neplatí:

Příklad. Prostor E^3 není přímým součtem $L_1 \dot{+} L_2 \dot{+} U$, je-li U rovina procházející počátkem a jsou-li $L_1, L_2 \subset E^3$ různé přímky procházející počátkem, neležící v rovině U.



Skutečně, součet $L_1 + L_2$ je sice přímý, ale má nenulový průnik s rovinou U.



Libovolný nenulový vektor $u = l_1 + l_2$ ležící v průniku $(L_1 + L_2) \cap U$ pak má dvojí vyjádření: jako součet $l_1 + l_2 + 0$ a jako součet $0 + 0 + u$.

Tvrzení. *Buďte $U_1, \dots, U_n \subseteq V$ podprostory takové, že $V = U_1 + \dots + U_n$. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(i) $V = U_1 \dot{+} U_2 \dot{+} \dots \dot{+} U_n$;

(ii) $U_1 \cap U_2 = 0$, $(U_1 + U_2) \cap U_3 = 0, \dots, (U_1 + \dots + U_{n-1}) \cap U_n = 0$.

Je-li navíc prostor V konečněrozměrný, pak je s nimi ekvivalentní i podmínka

(iii) $\dim V = \dim U_1 + \dots + \dim U_n$.

Problém k řešení. Dokažte poslední tvrzení.