Matematický ústav Slezské univerzity v Opavě
Učební texty k přednášce ALGEBRA I, zimní semestr 2002/2003
Michal Marvan

0. Množiny, relace a zobrazení

Ukázuje se, že pojem „množina“ nelze jednoduše definovat – naivní pokusy vedou ke sporům. Přesto v dnešní době spočívají základy matematiky právě v teorii množin a lepší alternativa zatím neexistuje. Korektní zavedení pojmu množina představuje problém řešený v tzv. axiomatické teorii množin a příslušný výklad je předmětem samostatné přednášky.

Buď M množina. Zápis $a \in M$ označuje, že a je prvek množiny M. Říkáme též, že a patří do množiny M. Zápis $a \notin M$ označuje, že a není prvek množiny M (nepatří do množiny M). Pro libovolné a nastává právě jedna z možností $a \in M$ nebo $a \notin M$.

Intuitivní představa spojená s pojmem množina je stejná jako u slov „souhrn“ či „soubor.“ Ale například „množina všech množin“ obsahuje sama sebe a vzniká logický kruh, kdy se objekt podílí na své vlastní definici, což otevírá cestu k různým paradoxům (viz Russelův paradox níže). Podle axiomatické teorie množin „množina všech množin“ neexistuje.

0.1. Definice. Množiny A, B jsou si *rovny*, mají-li tytéž prvky, tj. platí-li ekvivalence

$$x \in A \quad \Leftrightarrow \quad x \in B.$$

Zapisujeme $A = B$.

Uvedená definice odpovídá na otázku: „Jak poznáme, že jsou si množiny rovny?“ Obecně řečeno, definicemi zavádíme nové pojmy, zde rovnost množin. Definice umožňuje rozhodnout, zda definovaná situace (rovnost množin) nastala či nenastala.

Existuje právě jedna množina, která neobsahuje žádný prvek. Nazývá se *prázdná množina* a označuje se $\emptyset$. Jednoznačnost prázdné množiny lze dokázat: každá jiná množina, která také neobsahuje žádné prvky, je rovna množině $\emptyset$ podle právě uvedené definice rovnosti množin.

Konečnou množinu (množinu s konečným počtem prvků) lze zadat výčtem prvků, například $A = \{\heartsuit, \spadesuit, \diamondsuit, \clubsuit\}$. Některé nekonečné množiny lze zadat neúplným výčtem, například $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ je množina všech přirozených čísel.

Příklad. Platí $\{\clubsuit\} = \{\clubsuit, \clubsuit\}$, protože množiny na levé a pravé straně shodně obsahují prvek $\clubsuit$ a žádný jiný.

0.2. Definice. Řekneme, že množina B je *podmnožinou* množiny A, jestliže každý prvek z množiny B náleží i množině A, tj. když platí implikace

$$x \in B \quad \Rightarrow \quad x \in A.$$

Zapisujeme $B \subseteq A$. Vztah '$\subseteq$' se nazývá *inkluze*.

Příklad. Platí $\{\heartsuit, \clubsuit\} \subseteq \{\heartsuit, \spadesuit, \diamondsuit, \clubsuit\}$. Vskutku, všechny prvky ležící v množině $\{\heartsuit, \clubsuit\}$, což jsou prvky $\heartsuit$ a $\clubsuit$, leží i v množině $\{\heartsuit, \spadesuit, \diamondsuit, \clubsuit\}$.

Zápis $B \subset A$ znamená, že $B \subseteq A$ a zároveň $B \neq A$. Například, $\{\heartsuit, \clubsuit\} \subset \{\heartsuit, \spadesuit, \diamondsuit, \clubsuit\}$.

Cvičení. Rozhodněte, zda platí
a) $\{\clubsuit\} \in \{\{\clubsuit\}\}$;
b) $\{\clubsuit\} \subset \{\{\clubsuit\}\}$;
c) $\emptyset \in \{\emptyset\}$;
d) $\emptyset \subset \{\emptyset\}$.

Návod: V případech a) a c) se ptáme, zda prvek ležící po levé straně symbolu ‚$\in$‘ náleží množině uvedené po pravé straně symbolu ‚$\in$‘. V případech b) a d) se ptáme, zda všechny prvky ležící v množině uvedené po levé straně symbolu ‚$\subseteq$‘ leží i v množině uvedené po pravé straně symbolu ‚$\subseteq$‘.

Cvičení. 1. Negujte výrok $\forall_{x\in A}\, x \in B$. Jak se pozná, že neplatí $A \subseteq B$?
2. Jak se pozná, že neplatí $A \subset B$?

0.3. Tvrzení. *Pro libovolné dvě množiny A, B jsou následující výroky ekvivalentní*:
(1) $A = B$;
(2) $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$.

Důkaz. Ekvivalenci ‚$\Leftrightarrow$' dokážeme tak, že zvlášť dokážeme implikaci ‚$\Rightarrow$' a zvlášť implikaci ‚$\Leftarrow$'.

‚$\Rightarrow$': Platí-li (1), mají obě množiny tytéž prvky, a pak každý prvek množiny A leží v množině B a naopak, každý prvek množiny B leží v množině A. Platí tedy oba výroky $A \subseteq B$ a $B \subseteq A$.

‚$\Leftarrow$': Platí-li (2), pak každý prvek množiny A leží v množině B a každý prvek množiny B leží v množině A. Tudíž, množiny A, B mají stejné prvky.

Jiný důkaz implikace ‚$\Leftarrow$' (sporem): Připusťme, že A, B nemají stejné prvky, pak existuje prvek x ležící jen v jedné z nich. Rozeznávejme dva případy. V případě, že x leží v A a ne v B, neplatí $A \subseteq B$, v případě, že x leží v B a ne v A, neplatí $B \subseteq A$. V obou případech (2) neplatí.)

Jiný důkaz. Výrok $\alpha \Leftrightarrow \beta$ je logicky ekvivalentní s výrokem $(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)$. Dosadíme-li za α výrok „$x \in A$" a za β výrok „$x \in B$", dostáváme, že výrok $x \in A \Leftrightarrow x \in B$ je ekvivalentní s výrokem $(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)$, což bylo třeba dokázat.

Buď A množina. Buď ψ nějaká vlastnost, kterou prvek $a \in A$ buď má, což zapisujeme $\psi(a)$, či nemá, což zapisujeme $\neg\psi(a)$. Podmnožina množiny A tvořená všemi prvky $a \in A$ s vlastností ψ se označuje

$$\left\{\, a \in A \,\middle|\, \psi(a) \,\right\}.$$

Zapamatujte si:

$$x \in \left\{\, a \in A \,\middle|\, \psi(a) \,\right\} \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \;\wedge\; \psi(a).$$

Příklad. Je-li $A = \{\heartsuit, \spadesuit, \diamondsuit, \clubsuit\}$, pak $\{\, a \in A \mid a \text{ je černé barvy} \,\} = \{\spadesuit, \clubsuit\}$.

Zápis $\{\, a \mid \psi(a) \,\}$ (chybí „$\in A$", kde A je množina) je v principu také možný, ale nemusí označovat množinu. Příklad (Russelův paradox): Nechť $N = \{\, x \mid x \text{ je množina a } x \notin x \,\}$ (souhrn všech množin, které nejsou samy svým prvkem). Připustíme-li, že N je množina, pak mohou nastat dvě možnosti: Buď $N \notin N$, ale pak $N \in N$ podle své vlastní definice, spor; anebo $N \in N$, ale pak $N \notin N$ podle definice, opět spor. Tudíž, N není množina.

Buď n přirozené číslo, buďte $A_1, \dots, A_n$ nějaké množiny. Sjednocení množin $A_1, \dots, A_n$ označíme $A_1 \cup \cdots \cup A_n$; je to množina tvořená právě těmi prvky a, které leží v alespoň jedné z množin $A_1, \dots, A_n$. Například, $\{\heartsuit\} \cup \{\heartsuit, \spadesuit\} \cup \{\spadesuit, \clubsuit\} = \{\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$. Platí ekvivalence $a \in A \cup B \Leftrightarrow a \in A \vee a \in B$.

Průnik množin $A_1, \dots, A_n$ označíme $A_1 \cap \cdots \cap A_n$; je to množina tvořená právě těmi prvky a, které leží v každé z množin $A_1, \dots, A_n$. Například, $\{\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\} \cap \{\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit\} = \{\heartsuit, \clubsuit\}$. Zřejmě $A \cap B = \{\, x \in A \mid x \in B \,\} = \{\, x \in B \mid x \in A \,\}$. Platí $a \in A \cap B \Leftrightarrow a \in A \wedge a \in B$.

Rozdíl množin A, B je $A \setminus B = \{\, a \in A \mid a \notin B \,\}$. Například: $\{\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\} \setminus \{\heartsuit, \diamondsuit\} = \{\spadesuit, \clubsuit\}$.

Sjednocení, průnik i rozdíl množin jsou vždy opět množiny. Platí rovnosti

$$\begin{aligned}
A \cup B &= B \cup A, & A \cap B &= B \cap A,\\
A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C & A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C\\
&= A \cup B \cup C, & &= A \cap B \cap C,\\
A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C), & A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C),\\
A \setminus (B \cap C) &= (A \setminus B) \cup (A \setminus C), & A \setminus (B \cup C) &= (A \setminus B) \cap (A \setminus C).
\end{aligned}$$

Cvičení. Dokažte předchozí rovnosti dosazením do vhodných logických ekvivalencí.

1. Kartézský součin

Řekneme, že je zadána *uspořádaná dvojice* (a, b) prvků množin A, B, je-li zadána její *první složka* $a \in A$ a *druhá složka* $b \in B$. Uspořádané dvojice (a, b) a (a', b') jsou si *rovny*, právě když platí $a = a'$ a zároveň $b = b'$. Zapisujeme $(a, b) = (a', b')$.

Vidíme, že uspořádaná dvojice (a, b) je jednoznačně určena zadáním dvou prvků a jejich pořadím, na rozdíl od množiny $\{ a, b \}$, která je určena zadáním dvou prvků bez ohledu na pořadí.

Shora uvedené vymezení pojmu uspořádaná dvojice lze v jisté rozumné míře považovat za definici. Alternativně můžeme uspořádanou dvojici (a, b) *definovat* předpisem $(a, b) = \{\{ a \}, \{ a, b \}\}$. Skutečně, $\{\{ a \}, \{ a, b \}\} = \{\{ a' \}, \{ a', b' \}\}$ právě tehdy, když $a = b \wedge a' = b'$ (pokuste se dokázat).

Množinu všech uspořádaných dvojic (a, b) prvků množin A, B nazýváme *kartézský součin* množin A, B a označujeme $A \times B$.

Příklad. $\{ \heartsuit, \diamondsuit \} \times \{ \spadesuit, \clubsuit \} = \{(\heartsuit, \spadesuit),\ (\heartsuit, \clubsuit),\ (\diamondsuit, \spadesuit),\ (\diamondsuit, \clubsuit)\}$.

Příklad. Buďte A, B libovolné množiny, buďte $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$ jejich podmnožiny. Pak platí

$$A' \times B' = (A \times B') \cap (A' \times B).$$

Proveďme důkaz tohoto tvrzení. Jde o rovnost množin; dokažme inkluze „$\subseteq$“ a „$\supseteq$“ zvlášť.

„$\subseteq$“: Buď $(a, b) \in A' \times B'$ libovolný prvek. To znamená, že $a \in A'$ a $b \in B'$ jsou dva libovolné prvky. Protože $A' \subseteq A$, je také $a \in A$, načež $(a, b) \in A \times B'$. Protože $B' \subseteq B$, máme podobně $b \in B$, načež $(a, b) \in A' \times B$. Tudíž, $(a, b) \in (A \times B') \cap (A' \times B)$. Příslušná inkluze je dokázána.

„$\supseteq$“: Buď (a, b) libovolný prvek průniku $(A \times B') \cap (A' \times B)$. Pak speciálně $(a, b) \in A \times B'$, načež $a \in A$, $b \in B'$. Podobně $(a, b) \in A' \times B$, načež $a \in A'$, $b \in B$. Z $a \in A'$, $b \in B'$ vyplývá $(a, b) \in A' \times B'$. Tím je dokázána i opačná inkluze.

Cvičení. Buďte A, B libovolné množiny, buďte A', $A'' \subseteq A$ podmnožiny. Dokažte, že platí
1. $(A' \cap A'') \times B = (A' \times B) \cap (A'' \times B)$;
2. $(A' \cup A'') \times B = (A' \times B) \cup (A'' \times B)$.

Podobně jako uspařádané dvojice lze zavést i uspořádané trojice, čtveřice, atd., obecně $n$tice pro libovolné přirozené číslo n. Dvě $n$tice $(a_1, \dots, a_n)$ a $(b_1, \dots, b_n)$ jsou si rovny, jestliže $a_i = b_i$ pro každé $i = 1, \dots, n$.

Cvičení. Zaveďme uspořádané trojice předpisem $(a_1, a_2, a_3) := (a_1, (a_2, a_3))$, kde symbol ‚:=‘ znamená, že objekt na jeho levé straně je definován formulí uvedenou na jeho pravé straně. Všimněte si, že na pravé straně stojí dvě uspořádané dvojice, což jsou pojmy již známé. Ukažte, že $(a_1, a_2, a_3) = (b_1, b_2, b_3)$ právě tehdy, když $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ a $a_3 = b_3$.

2. Relace

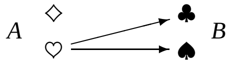
2.1. Definice. Buďte A, B libovolné množiny. *Relace* (neboli korespondence) mezi množinami A, B je libovolná podmnožina kartézského součinu $A \times B$. Je-li $\rho \subseteq A \times B$ relace a jsou-li $a \in A$, $b \in B$ prvky takové, že $(a, b) \in \rho$, pak říkáme, že prvek a je v relaci ρ s prvkem b a stručně zapisujeme $a\rho b$. Relace *na* množině A je zvláštní případ, kdy $A = B$.

Zadat relaci mezi množinami A, B je tedy totéž, co vybrat určitou množinu dvojic (a, b), kde $a \in A$ a $b \in B$. Zapamatujte si:

$$a\rho b \quad \Leftrightarrow \quad (a, b) \in \rho.$$

Relace mezi množinami, zejména konečnými, můžeme znázorňovat grafem. Prvky množin A, B znázorníme body v rovině, body a a b znázorňující prvky jednotlivých množin spojíme šipkou tehdy a jen tehdy, jsou-li v relaci.

Příklady. 1. Nechť $A = \{\heartsuit, \diamondsuit\}$, $B = \{\spadesuit, \clubsuit\}$. Podmnožina $\rho = \{(\heartsuit, \spadesuit),\ (\heartsuit, \clubsuit)\}$ je relace mezi množinami A, B. Platí $\heartsuit\rho\spadesuit$ a $\heartsuit\rho\clubsuit$. Neplatí například $\diamondsuit\rho\clubsuit$. Graficky:



2. Prázdná podmnožina $\emptyset \subseteq A \times B$ je relace mezi množinami A, B. Žádné dva prvky $a \in A$, $b \in B$ nejsou v této relaci. Graf takové relace neobsahuje žádnou šipku.

3. Podmnožina $A \times B \subseteq A \times B$ je relace mezi množinami A, B. Každé dva prvky $a \in A$, $b \in B$ jsou v této relaci. Graf takové relace obsahuje po jedné šipce z každého prvku $a \in A$ do každého prvku $b \in B$.

4. *Identická relace* na množině A je podmnožina $\mathrm{id}_A = \{\,(a, a) \mid a \in A\,\}$. Prvky $a, b \in A$ jsou v této relaci právě tehdy, když $a = b$.

5. Relace ostrého uspořádání podle velikosti „$<$“ na množině $\mathbf{R}$ reálných čísel.

6. Relace neostrého uspořádání podle velikosti „$\le$“ na množině $\mathbf{R}$ reálných čísel.

7. Relace „$\lhd$“ sousedství zleva mezi celými čísly – řekneme, že číslo a sousedí zleva s číslem b, jestliže $b = a + 1$.

Cvičení. Nakreslete grafy relací 2, 3, 4 a 7.

2.2. Definice. Buď ρ relace mezi množinami A, B, buď σ relace mezi množinami C, D. Řekneme, že relace ρ a σ jsou si rovny, jestliže $A = C$, $B = D$ a $\rho = \sigma$.

Požadavek rovnosti množin $\rho = \sigma$ vyplývá z definice relace jako jisté množiny. Požadavek rovnosti množin $A = C$ a $B = D$ je navíc a jen „pro pořádek,“ aby jedna a tatáž relace nemohla být mezi různými množinami. Kdybychom relaci definovali jako uspořádanou trojici (A, B, ρ), pak by rovnost množin byla přímým důsledkem definice relace.

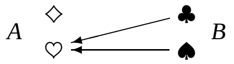
2.3. Definice. Relace ρ^{-1} mezi množinami B, A definovaná předpisem

$$\rho^{-1} := \left\{\, (b, a) \middle| a\rho b \,\right\}$$

se nazývá *opačná relace* k relaci ρ.

Zapamatujte si: $a\rho b \Leftrightarrow b\rho^{-1}a$. V grafu relace ρ^{-1} vede šipka $b \to a$ právě tehdy, když v grafu relace ρ vede šipka $a \to b$. Vidíme, že graf opačné relace vznikne obrácením všech šipek grafu původní relace.

Příklady. 1. Relace ρ^{-1} mezi množinami $B = \{\spadesuit, \clubsuit\}$ a $A = \{\heartsuit, \diamondsuit\}$, opačná k relaci zavedené v předchozím příkladu č. 1, je podmnožina $\rho^{-1} = \{(\spadesuit, \heartsuit),\ (\clubsuit, \heartsuit)\}$. Graf:



2. Relace opačná k relaci „$<$“ uspořádání reálných čísel podle velikosti je relace „$>$“ opačného uspořádání podle velikosti.

3. Buď $H = \{h_1, h_2\}$ nějaká množina hochů, $D = \{d_1, d_2\}$ nějaká množina dívek. Někteří hoši chodí s dívkou; fakt, že hoch $h \in H$ chodí s dívkou $d \in D$ zapíšeme $h\chi d$. Vzniká tak relace $\chi \subseteq H \times D$. Relace χ^{-1} pak popisuje, která dívka chodí se kterým hochem.

2.4. Definice. Buď ρ relace mezi množinami A, B, buď σ relace mezi množinami B, C. Relace $\sigma \circ \rho$ (čti „σ po ρ“) mezi množinami A, C definovaná předpisem

$$\sigma \circ \rho = \left\{\, (a, c) \middle| \exists_{b \in B} (a\rho b \wedge b\sigma c) \,\right\}$$

se nazývá *složení relací* ρ a σ.

Zapamatujte si: $a\rho c \Leftrightarrow \exists_{b \in B}(a\rho b \wedge b\sigma c)$. V grafu relace $\sigma \circ \rho$ vede šipka mezi prvky $a \in A$ a $c \in C$ právě tehdy, když v grafu relace ρ vede šipka $a \to b$ do alespoň jednoho prvku $b \in B$, na niž v grafu relace σ navazuje šipka $b \to c$.

Příklady. 1. Pokračujme v předchozím příkladu č. 3. Některé dívky navíc chodí se svým psem; množinu všech takových psů označme P. Fakt, že dívka $d \in D$ chodí se psem $p \in P$ zapíšeme $d\pi p$. Vzniká tak relace $\pi \subseteq D \times P$. Pak $\pi \circ \chi$ je relace, která vyjadřuje, který hoch chodí se kterým psem. Vskutku, hoch h chodí se psem p právě tehdy, když existuje dívka d, se kterou chodí jak hoch h, tak pes p.

Například, nechť $H = \{ h_1, h_2 \}$, $D = \{ d_1, d_2 \}$, $P = \{ p_1, p_2 \}$. Nechť hoch h_1 chodí s dívkou d_2, hoch h_2 nechodí s nikým a každá dívka d_i chodí se svým psem p_i, $i = 1, 2$. Máme

$$\begin{tikzcd}
H & h_1 \arrow[drr, "\chi"'] & D & d_1 \arrow[r] & p_1 & P \\
 & h_2 & & d_2 \arrow[r, "\pi"'] & p_2 &
\end{tikzcd}$$

a tedy $\pi \circ \chi = \{(h_1, p_2)\}$.

2. Uvažujme o relaci „$\lhd$“ sousedství zleva mezi celými čísly z příkladu č. 7. Pak $a(\lhd \circ \lhd)c$ právě tehdy, když $c = a + 2$.

2.5. Tvrzení. *Buď ρ relace mezi množinami A, B. Pak platí*

1°. $\rho \circ \mathrm{id}_A = \rho$;

$1'$. $\mathrm{id}_B \circ \rho = \rho$.

Buď navíc σ relace mezi množinami B, C. Pak platí

2. $(\sigma \circ \rho)^{-1} = \rho^{-1} \circ \sigma^{-1}$.

Důkaz. 1° a $1'$ jsou snadná; dokážeme tvrzení 2. Jde o rovnost množin, dokazujme každou inkluzi zvlášť.

„$\subseteq$“: Nechť $(c, a) \in (\sigma \circ \rho)^{-1}$. Pak $(a, c) \in \sigma \circ \rho$, načež existuje prvek $b \in B$ takový, že $a\rho b$ a $b\sigma c$. Potom ale $c\sigma^{-1}b$ a $b\rho^{-1}a$, takže $(c, a) \in \rho^{-1} \circ \sigma^{-1}$.

„$\supseteq$“: Cvičení (stačí postupovat obráceně).

Cvičení. 1. Ukažte, že $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$.

2. Nechť $\rho \subseteq \rho'$, $\sigma \subseteq \sigma'$. Dokažte, že pak $\rho \circ \sigma \subseteq \rho' \circ \sigma'$.

3. Zobrazení

Velmi důležitý je pojem zobrazení mezi množinami. Zde pojednáme jen o některých nejdůležitějších vlastnostech. Další užitečné definice a tvrzení jsou uvedeny v přednášce z matematické analýzy.

Intuitivně jde o přiřazení hodnoty: každému prvku z jedné množiny A se přiřadí právě jedna „hodnota“ z druhé množiny. Zobrazení lze definovat jako speciální případ relace:

Definice. Buďte A, B množiny. *Zobrazení* f z množiny A do množiny B je relace $f \subseteq A \times B$, která splňuje podmínku: Pro každý prvek $a \in A$ existuje právě jeden prvek $b \in B$ takový, že platí $(a, b) \in f$.

Prvek b se pak obvykle označuje $f(a)$, někdy také f_a. Nazývá se *hodnota* zobrazení f v prvku a nebo také *obraz* prvku a při zobrazení f.

Zápisem $f : A \to B$ vyjadřujeme, že f je zobrazení z množiny A do množiny B. Jiný zápis: $a \xrightarrow{f} b$. Místo $b = f(a)$ často píšeme $f : a \mapsto b$ nebo $a \xmapsto{f} b$.

Zobrazení $f : A \to B$ je jednoznačně určeno zadáním množin A, B a hodnot $f(a)$ pro každé $a \in A$. Zobrazení $f : A \to B$, $g : C \to D$ jsou si rovna právě tehdy, když $A = C$, $B = D$ a pro každé $a \in A$ platí $f(a) = g(a)$.

Existuje zvláštní kvantifikátor $\exists!$ s významem „existuje právě jeden.“ Jinak řečeno: „existuje, a pokud existují dva, pak jsou stejné.“ Negací je: „Neexistuje žádný nebo existují alespoň dva různé.“

Podmínku z definice zobrazení pak můžeme zapsat jako

$$\forall_{a \in A} \exists!_{b \in B} \, (a, b) \in f. \tag{*}$$

Příklady. 1. Nechť $A = \{\heartsuit, \spadesuit, \diamondsuit, \clubsuit\}$, $B = \{\square, \blacksquare\}$. Pak následující předpisy zadávají jedno a to samé zobrazení $f : A \to B$:
(1) $f = \{(\heartsuit, \square), (\spadesuit, \blacksquare), (\diamondsuit, \square), (\clubsuit, \blacksquare)\} \subset A \times B$.
(2) $f(\heartsuit) = \square$, $f(\spadesuit) = \blacksquare$, $f(\diamondsuit) = \square$, $f(\clubsuit) = \blacksquare$.
(3) $f : \heartsuit \mapsto \square$, $\spadesuit \mapsto \blacksquare$, $\diamondsuit \mapsto \square$, $\clubsuit \mapsto \blacksquare$.
2. Relace, která vejci přiřazuje slepici, která je snesla, je zobrazení z množiny všech slepičích vajec do množiny všech slepic.

Identická relace na množině A je zobrazení (*identické zobrazení*) z množiny A do ní samé a značí se $\mathrm{id}_A : A \to A$. Platí $\mathrm{id}_A(a) = a$ pro každé $a \in A$.

3.1. Tvrzení. *Buďte $f : A \to B$, $g : B \to C$ dvě zobrazení. Pak je relace $g \circ f$ zobrazení $A \to C$ a*

$$(g \circ f)(a) = g\big(f(a)\big) \qquad \text{pro každé } a \in A. \tag{**}$$

Důkaz. Buď $a \in A$ libovolný prvek. Dokažme existenci obrazu. Označme $c := g(f(a)) \in C$. Pak platí $(a, c) \in g \circ f$, protože prvek $b := f(a) \in B$ splňuje $(a, b) \in f$ a $(b, c) \in g$ (proč?).

Dokažme jednoznačnost obrazu. Je-li $c \in C$ prvek takový, že $(a, c) \in g \circ f$, pak podle definice existuje prvek $b \in B$ takový, že $(a, b) \in f$ a $(b, c) \in g$. Ale f je zobrazení, a proto prvek $b \in B$ takový, že $(a, b) \in f$ existuje právě jeden. Podobně g je zobrazení, a proto prvek $c \in C$ takový, že $(b, c) \in g$ existuje právě jeden.

Zobrazení $g \circ f$ se nazývá *kompozice* zobrazení f, g.

3.2. Tvrzení. (1) *Budiž $f : A \to B$ zobrazení. Pak*

$$f \circ \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_B \circ f = f.$$

(2) *Buďte $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ zobrazení. Pak*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Jak vyplývá z (2), výraz $h \circ g \circ f$ je jednoznačný i při vynechaných závorkách.

Důkaz. (1) Jak $f \circ \mathrm{id}_A$, tak $\mathrm{id}_B \circ f$ jsou zobrazení $A \to B$. Ukažme, že pro každé $a \in A$ nabývají stejných hodnot. Pro libovolné $a \in A$ ale máme $(f \circ \mathrm{id}_A)(a) = f(\mathrm{id}_A(a)) = f(a)$ a podobně $(\mathrm{id}_B \circ f)(a) = \mathrm{id}_B(f(a)) = f(a)$.

(2) Jak $h \circ (g \circ f)$, tak $(h \circ g) \circ f$ jsou zobrazení $A \to D$. Ukažme, že nabývají stejných hodnot pro každé $a \in A$. Pro libovolný prvek $a \in A$ máme $\big(h \circ (g \circ f)\big)(a) = h\big((g \circ f)(a)\big) = h(g(f(a))) = (h \circ g)\big(f(a)\big) = \big((h \circ g) \circ f\big)(a)$.

Cvičení. Proč platí každá z rovností uvedených v důkazu?
Například rovnost $\big(h \circ (g \circ f)\big)(a) = h\big((g \circ f)(a)\big)$ je výsledkem dosazení h za g, $g \circ f$ za f a a za a do formule $(**)$ definující skládání „$\circ$." Vysvětlete zbývající rovnosti.

Buď dáno zobrazení $f : A \to B$. Je-li prvek $b \in B$ obrazem prvku $a \in A$, pak se prvek a nazývá *vzor prvku b při zobrazení f*. Množina všech vzorů prvku $b \in B$ při zobrazení f se značí $f^{-1}\{b\}$. Zapamatujte si formuli:

$$f(a) = b \Leftrightarrow a \in f^{-1}(b).$$

Zatímco obraz obecného prvku $a \in A$ vždy existuje a je jediný, vzor prvku $b \in B$ obecně existovat nemusí a nemusí být ani jediný. V souvislosti s tím uveďme další definice.

3.3. Definice. Zobrazení $f : A \to B$ se nazývá *surjektivní* (čili *surjekce*), jestliže má každý prvek $b \in B$ alespoň jeden vzor v A:

$$\forall_{b \in B} \exists_{a \in A} \, b = f(a).$$

Zobrazení $f : A \to B$ se nazývá *injektivní* (čili *injekce*) neboli *prosté*, jestliže má každý prvek $b \in B$ nejvýše jeden vzor v A:

$$\forall_{a_1, a_2 \in A} \big(f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2 \big).$$

Tudíž, zobrazení f je surjektivní právě tehdy, když je pro každé $b \in B$ množina $f^{-1}\{b\}$ neprázdná. Hovoříme též o zobrazení množiny A *na* množinu B. Zobrazení f je injektivní právě tehdy, když je pro každé $b \in B$ množina $f^{-1}\{b\}$ nejvýše jednoprvková.

Příklady. 1. $\{\heartsuit, \spadesuit, \diamondsuit, \clubsuit\} \to \{\square, \blacksquare\}$, $f(\heartsuit) = \square$, $f(\spadesuit) = \blacksquare$, $f(\diamondsuit) = \square$, $f(\clubsuit) = \blacksquare$. Zobrazení f je surjektivní (oba prvky $\blacksquare, \square \in B$ mají vzor), ale není injektivní (např. $\blacksquare$ má dva vzory: $\spadesuit$ a $\clubsuit$).

2. Vraťme se k relaci χ mezi množinou H hochů a množinou D dívek. Tato relace je zobrazením, pokud každý hoch $h \in H$ chodí s právě jednou dívkou $d \in D$. Toto zobrazení je injektivní, pokud každá dívka chodí s nejvýše jedním hochem a je surjektivní, pokud každá dívka chodí s alespoň jedním hochem.

Cvičení. Buďte $f : A \to B$, $g : B \to C$ dvě zobrazení.

(1) Je-li zobrazení $g \circ f$ injektivní, pak je i zobrazení f injektivní.

(2) Je-li zobrazení $g \circ f$ surjektivní, pak je i zobrazení g surjektivní.

Dokažte.

Cvičení. Buďte $f : A \to B$, $g : A \to B$ dvě zobrazení. Dokažte, že platí:

(1) Buď $h : B \to C$ injektivní zobrazení takové, že $h \circ f = h \circ g$. Pak $f = g$. Jinými slovy, injektivním zobrazením lze krátit zleva.

(2) Buď $h : D \to A$ surjektivní zobrazení takové, že $f \circ h = g \circ h$. Pak $f = g$. Jinými slovy, surjektivním zobrazením lze krátit zprava.

Je-li $A \subseteq X$ podmnožina, pak je $\iota_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$ zobrazení, které prvku $a \in A$ přiřadí týž prvek $a \in X$: $\iota_{AX}(a) = a$. Zobrazení ι_{AX} je injektivní (dokažte) a nazývá se *vložení* podmnožiny. Je-li $f : X \to Y$ nějaké zobrazení, pak kompozice $f \circ \iota_{AX}$ představuje zobrazení $A \to Y$, které se nazývá *restrinkce* zobrazení f na podmnožinu A a značí se $f|_A$:

$$f|_A : A \xrightarrow{\iota_{AX}} X \xrightarrow{f} Y.$$

Všimněte si, že restrinkce je dána týmž předpisem $a \mapsto f(a)$ jako f.

Je-li množina Y obsažena v jiné množině Z, pak existuje i kompozice $\iota_{YZ} \circ f : X \to Z$. V tomto případě říkáme, že f vzniká rozšířením oboru hodnot, ale zvláštní dohodnuté označení neexistuje, naopak, bývá zvykem rozdíl v oborech hodnot ignorovat.

Každé zobrazení $f : X \to Y$ vzniká rozšířením oboru hodnot některého surjektivního zobrazení. Vskutku, označme $fX = \{f(x) \mid x \in X\}$ množinu všech hodnot zobrazení f. Pak je $\bar{f} : X \to fX$, $x \mapsto f(x)$ surjektivní zobrazení a platí $f = \iota_{fX,X} \circ \bar{f}$.

Pro konečné množiny platí tzv. Dirichletův zásuvkový princip: Umístíme-li n předmětů do m zásuvek, přičemž $m < n$, pak existuje zásuvka, která obsahuje alespoň dva předměty. Matematicky lze tento princip zformulovat jako následující tvrzení:

3.4. Tvrzení. *Buď $f : A \to B$ zobrazení mezi konečnými množinami. Buď m počet prvků množiny A a n počet prvků množiny B. Je-li $m > n$, pak f není injektivní.*

Důkaz povedeme matematickou indukcí. Jde o známý trik, umožňující dokazovat tvrzení $\Theta(n)$ závislé na nějakém přirozeném čísle n. Dokážeme-li

(1) platnost $\Theta(1)$,

(2) indukční krok: z platnosti $\Theta(i)$ pro všechna $i < n$ plyne platnost $\Theta(n)$,

lze tvrzení $\Theta(n)$ považovat za dokázané pro všechna n.

Vskutku, připusťme, že existuje m takové, že $\Theta(m)$ neplatí. Pak existuje nejmenší přirozené číslo m takové, že $\Theta(m)$ neplatí. (Existence takového m je intuitivně zřejmá, ale důkaz nepodáváme; v přednášce z teorie množin bude platnost podobného tvrzení jednou z podmínek definujících množinu přirozených čísel.) Je-li $m = 1$, pak dostáváme spor s tvrzením $\Theta(1)$. Je-li $m > 1$, pro všechna i splňující $1 \le i < m$ tvrzení platí (m bylo minimální pro něž neplatí), a proto podle (2) platí i pro m, opět spor.

Důkaz. Dokazujme matematickou indukcí vzhledem k číslu n. Je-li $n = 1$, máme v množině B jediný prvek, na který se musí zobrazit všech $m > 1$ prvků množiny A, tvrzení tedy platí.

Indukční krok: Nechť tvrzení platí pro všechna $i < n$. Ukažme, že pak platí i pro n. Uvažujme tedy o zobrazení f z m-prvkové množiny A do n-prvkové množiny B. Vyberme libovolný prvek $b \in B$. Prvek b má vzor $f^{-1}\{b\}$. Rozlišujme tři případy:

a) Má-li vzor $f^{-1}\{b\}$ více než jeden prvek, není zobrazení f injektivní a jsme hotovi.

b) Nemá-li $f^{-1}\{b\}$ žádný prvek, můžeme f považovat za zobrazení do množiny $B' = B \setminus \{b\}$, která má $n-1$ prvek. Pak $m > n > n-1$, načež podle indukčního předpokladu f není injektivní jako zobrazení do B', a proto ani jako zobrazení do B.

c) Nakonec, nechť má množina $f^{-1}\{b\}$ právě jeden prvek, který označíme a. Označme $B' = B \setminus \{b\}$, $A' = A \setminus \{a\}$. Zobrazení f zobrazuje prvky podmnožiny A' do podmnožiny B'. Skutečně, v opačném případě by existoval prvek $a' \in A'$ takový, že $f(a') \notin B'$, ale pak nutně $f(a') = b$, přičemž b má jediný vzor, a sice a, takže $a' = a$, spor.

Dostáváme tedy zobrazení $m-1$-prvkové množiny A' do $n-1$-prvkové množiny B', vlastně restrinkci $f|_{A'}$. Přitom bylo-li $m > n$, je $m-1 > n-1$, a proto zobrazení $f|_{B'}$ není injektivní podle indukčního předpokladu. To znamená, že ani f není injektivní.

Cvičení. Jaké musí být n, abychom měli jistotu, že mezi n křečky se najdou dva, kteří mají narozeniny ve stejný den.

4. Bijekce

Zobrazení $f : A \to B$ se nazývá *bijektivní* čili *bijekce*, je-li injektivní a surjektivní současně Tudíž, zobrazení f je bijektivní tehdy a jen tehdy, má-li každý prvek $b \in B$ právě jeden vzor (je-li pro každé $b \in B$ množina $f^{-1}\{b\}$ jednoprvková).

4.1. Tvrzení. *Buď $f : A \to B$ zobrazení. Následující podmínky jsou ekvivalentní*:

(1) *f je bijektivní*;

(2) *existuje zobrazení $g : B \to A$ takové, že*

$$g \circ f = \mathrm{id}_A\,, \qquad f \circ g = \mathrm{id}_B\,.$$

V kladném případě existuje jediné zobrazení g s vlastnostmi (2) *a je opět bijektivní.*

Zobrazení g z předchozího tvrzení se nazývá *inverzní* k f a značí se f^{-1}.

Důkaz. Dokažme implikaci „(1) $\Rightarrow$ (2).“ Buď f bijektivní. Označme $g = f^{-1} \subseteq B \times A$ relaci opačnou k relaci $f \subseteq A \times B$. Snadno se vidí, že následující výroky jsou ekvivalentní:

(1) Zobrazení f je bijektivní;

(2) Pro každý prvek $b \in B$ existuje právě jeden prvek $a \in A$ takový, že $b = f(a)$;

(3) Pro každý prvek $b \in B$ existuje právě jeden prvek $a \in A$ takový, že $(a, b) \in f$;
(4) Pro každý prvek $b \in B$ existuje právě jeden prvek $a \in A$ takový, že $(b, a) \in g$;
(5) Relace g je zobrazení $B \to A$.

Zobrazení $g : B \to A$ je definováno předpisem: $g(b) = a \Leftrightarrow b = f(a)$.

Ověřme rovnost $g \circ f = \mathrm{id}_A$. Zřejmě jde o dvě zobrazení $A \to A$. Pro každé $a \in A$ pak při označení $b = f(a)$ máme $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = a = \mathrm{id}_A(a)$, což se mělo dokázat. Podobně $f \circ g = \mathrm{id}_B$ (proveďte samostatně).

Dokažme implikaci „(2) $\Rightarrow$ (1).“ Nechť existuje zobrazení $g : B \to A$ takové, že $g \circ f = \mathrm{id}_A$ a $f \circ g = \mathrm{id}_B$. Ukažme, že f je surjektivní. Buď $b \in B$ libovolné. Položme $a = g(b)$, potom $f(a) = f(g(b)) = (f \circ g)(b) = \mathrm{id}_B(b) = b$, takže a je vzor prvku b při zobrazení f a f je surjektivní.

Ukažme, že f je injektivní. Buďte $a_1, a_2 \in A$ dva prvky takové, že $f(a_1) = f(a_2)$. Potom $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$, ale $g(f(a_1)) = (g \circ f)(a_1) = \mathrm{id}_A(a_1) = a_1$ a podobně $g(f(a_2)) = a_2$, načež $a_1 = a_2$ a f je injektivní.

Dále je třeba dokázat jednoznačnost zobrazení $g : B \to A$ s vlastnostmi $g \circ f = \mathrm{id}_A$ a $f \circ g = \mathrm{id}_B$. Buď $g' : B \to A$ jiné zobrazení, pro něž platí $g' \circ f = \mathrm{id}_A$ a $f \circ g' = \mathrm{id}_B$. Buď $b \in B$ libovolný prvek; ukažme, že $g(b) = g'(b)$. Máme ovšem $f(g(b)) = (f \circ g)(b) = \mathrm{id}_B(b) = (f \circ g')(b) = f(g'(b))$. Ale f je injektivní podle již dokázané implikace „(2) $\Rightarrow$ (1),“ načež $g(b) = g'(b)$. Vzhledem k libovolné volbě prvku b dostáváme rovnost $g = g'$.

Nakonec je třeba dokázat, že i zobrazení g je bijektivní. To ovšem plyne z již dokázané implikace „(2) $\Rightarrow$ (1),“ zaměníme-li mezi sebou $f \leftrightarrow g$ a $A \leftrightarrow B$.

4.2. Příklad. Zobrazení $f : \{\heartsuit, \diamondsuit\} \to \{\spadesuit, \clubsuit\}$, $\heartsuit \mapsto \spadesuit$, $\diamondsuit \mapsto \clubsuit$, je bijekce. Inverzní je zobrazení $g = f^{-1} : \{\spadesuit, \clubsuit\} \to \{\heartsuit, \diamondsuit\}$, $\spadesuit \mapsto \heartsuit$, $\clubsuit \mapsto \diamondsuit$. (Invertování bijekce spočívá v obracení šipek.)

4.3. Tvrzení. *Buď $f : A \to B$ bijektivní zobrazení. Pak $(f^{-1})^{-1} = f$.*

Důkaz. Je potřeba dokázat, že f je inverzní zobrazení k f^{-1}. K tomu použijeme předchozí Tvrzení 4.1(2), kam dosadíme f za g a f^{-1} za f a rovněž A za B a B za A. Obdržíme podmínku $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$ a $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$, která ovšem platí, protože f^{-1} je inverzní k f.

4.4. Tvrzení. *Buďte $f : A \to B$, $g : B \to C$ bijekce. Potom*
(1) *$g \circ f : A \to C$ je bijekce*;
(2) $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Důkaz. Jsou-li f a g bijekce, pak mají inverze f^{-1} a g^{-1}, pro které platí $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$, $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$, $g \circ g^{-1} = \mathrm{id}_C$, $g^{-1} \circ g = \mathrm{id}_B$.

Dokažme (1). Podle Tvrzení 4.1 stačí najít zobrazení inverzní k $g \circ f$. Vhodným kandidátem je zobrazení $h = f^{-1} \circ g^{-1} : C \to A$. A skutečně, platí $h \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f = f^{-1} \circ \mathrm{id}_B \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$. Podobně $(g \circ f) \circ h = g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1} = g \circ \mathrm{id}_B \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{id}_C$. Tudíž, $g \circ f$ má inverzi, a proto je bijektivní podle Tvrzení 4.1.

(2) Výpočet provedený v části (1) současně ukazuje, že $(g \circ f)^{-1} = h = f^{-1} \circ g^{-1}$.

4.5. Tvrzení. *Buďte A, B libovolné konečné množiny mající shodně po n prvcích. Buď $f : A \to B$ injektivní zobrazení. Ukažte, že f je bijektivní.*

Důkaz. Dokazuje se indukcí vzhledem k číslu n. Pro $n = 1$ je tvrzení zřejmé. Indukční krok: vyberme libovolně prvek $a \in A$ a označme $b = f(a)$. Uvažujme o množinách $A' = A \setminus \{a\}$ a $B' = B \setminus \{f(a)\}$. Zobrazení f zobrazuje prvky podmnožiny A' do podmnožiny B'. Vskutku, připusťme naopak, že se některý prvek $a' \in A'$ zobrazí vně B', tedy do prvku b, pak ale $f(a') = b = f(a)$, načež $a' = a$ v důsledku injektivity zobrazení f, spor. Přitom B' i A' mají shodně $n - 1$ prvků, zobrazení $f|_{A'} : A' \to B'$ je injektivní stejně jako f, a proto podle indukčního předpokladu je $f|_{A'} : A' \to B'$

surjektivní. Všechny prvky z B' tedy mají své vzory, zatímco prvek $b \in B \setminus B'$ má za vzor a, tudíž $f : A \to B$ je surjektivní.

5. Relace ekvivalence

5.1. Definice. Buď $\rho \subseteq A \times A$ relace *na* množině A. Relace ρ se nazývá
– *reflexivní*, jestliže pro každé $a \in A$ platí $a\rho a$;
– *symetrická*, jestliže platí implikace $a\rho b \Rightarrow b\rho a$;
– *tranzitivní*, jestliže platí implikace $(a\rho b \wedge b\rho c) \Rightarrow a\rho c$.

Příklady. 1. Identická relace id_A je reflexivní, symetrická i tranzitivní.
2. Relace „$\leq$“ neostrého uspořádání reálných čísel je tranzitivní a reflexivní.
3. Relace „$<$“ ostrého uspořádání reálných čísel je pouze tranzitivní.

Cvičení. Graf relace na množině můžeme kreslit tak, že místo dvou kopií množiny A zobrazíme jen jednu a šipky vedeme mezi jejími prvky. Jak se pozná graf reflexivní resp. symetrické resp. tranzitivní relace?

Cvičení. Najděte chybu v následujícím „důkazu“ nepravdivého tvrzení, že každá symetrická a tranzitivní relace ρ je reflexivní: „Je-li $a\rho b$, pak ze symetrie plyne $b\rho a$, načež z tranzitivity plyne $a\rho a$.“

5.2. Definice. Reflexivní, symetrická a tranzitivní relace se nazývá *relace ekvivalence* (nebo prostě *ekvivalence*, pokud nemůže dojít k záměně s logickou ekvivalencí).

Příklady. 1. Identická relace id_A je ekvivalence na množině A.
2. Buď V nějaká množina vajec. Zaveďme relaci ς předpisem: $v_1 \varsigma v_2$ právě tehdy, když vejce v_1 a v_2 pocházejí od stejné slepice. Pak ς je ekvivalence.

Problém k řešení. Buďte ρ, σ relace ekvivalence na množině A. Dokažte, že $\sigma \circ \rho$ je relace ekvivalence právě tehdy, když $\sigma \circ \rho = \rho \circ \sigma$.

Relace ekvivalence se hojně vyskytují v matematice i v realitě. Jsou vždy spojeny s takzvanými rozklady.

5.3. Definice. *Rozklad* na množině A je systém neprázdných podmnožin množiny A, zvaných *třídy* rozkladu, splňující podmínku, že každý prvek $x \in A$ leží v právě jedné z tříd. Třída rozkladu R obsahující prvek x se obvykle označuje $[x]_R$ nabo prostě R, je-li rozklad zřejmý z kontextu.

Příklady. 1. Nechť $A = \{\heartsuit, \spadesuit, \diamondsuit, \clubsuit\}$, $U = \{\heartsuit, \diamondsuit\}$, $V = \{\spadesuit, \clubsuit\}$. Pak $\{U, V\}$ je rozklad na množině A, protože každý z prvků $\heartsuit, \spadesuit, \diamondsuit, \clubsuit$ množiny A leží v právě jedné z množin U, V:

$$\begin{array}{|c|c|} \multicolumn{1}{c}{\overbrace{\quad}^{U}} & \multicolumn{1}{c}{\overbrace{\quad}^{V}} \\ \hline \heartsuit & \spadesuit \\ \diamondsuit & \clubsuit \\ \hline \end{array}$$

Přitom $[\heartsuit] = U$, $[\spadesuit] = V$, $[\diamondsuit] = U$, $[\clubsuit] = V$.
2. Množinu všech obcí České republiky lze rozložit na třídy, tvořené obcemi jednotlivých krajů (za předpokladu, že každá obec v České republice leží v právě jednom kraji). Pak [Opava] označuje množinu všech obcí ležících v témže kraji jako Opava. Přitom [Opava] = [Vávrovice], ale [Opava] $\neq$ [Humpolec].
3. Populace kura domácího může být rozložena na dvě třídy: kohouty a slepice.

Cvičení. 1. Nalezněte všechny rozklady na množině $A = \{1, 2, 3\}$ (je jich pět).
2. Dvě množiny A, B se nazývají disjunktní, je-li $A \cap B = \emptyset$. Ukažte, že každé dvě různé třídy rozkladu jsou disjunktní.

5.4. Tvrzení. *Buď dán rozklad na množině A na třídy $[a]$, $a \in A$. Buď ρ relace na množině A zadaná předpisem*

$$x\rho y \Leftrightarrow [x] = [y],$$

tj. $x\rho y$ právě když x, y leží v jedné a téže třídě rozkladu. Pak ρ je ekvivalence na A.

Důkaz. Tvrzení je vlastně důsledkem toho, že rovnost '$=$' je relace ekvivalence. Detailně: Pro každé $x \in A$ platí $x\rho x$, protože $[x] = [x]$. Tudíž, ρ je reflexivní.

Pro libovolné prvky $x, y \in A$, pro něž $x\rho y$, máme $[x] = [y]$, načež $[y] = [x]$, a tedy $y\rho x$. Tudíž, ρ je symetrická.

Pro libovolné prvky $x, y, z \in A$, pro něž $x\rho y$ a $y\rho z$ máme $[x] = [y] = [z]$, a tedy $x\rho z$. Tudíž, ρ je tranzitivní.

Příklady. Ve stejně číslovaných předchozích příkladech platí:

1. $\heartsuit\rho\diamondsuit$, $\spadesuit\rho\clubsuit$.
2. Obec a je ekvivalentní obci b právě tehdy, když obě leží v témže kraji.
3. Dva exempláře kura domácího jsou ekvivalentní právě tehdy, když jsou stejného pohlaví.

Každá ekvivalence pochází z rozkladu. Příslušný rozklad není těžké sestrojit.

5.5. Tvrzení. *Buď ρ ekvivalence na množině A. Označme*

$$[a]_\rho = \{\, x \in A | a\rho x \,\}, \qquad a \in A,$$

množinu všech prvků ekvivalentních s prvkem a. Pak je systém $\{[a]_\rho \mid a \in A\}$ rozklad na A.

Důkaz. Pro jednoduchost všude vynechávejme index ρ. Ukažme, že každý prvek $x \in A$ leží v právě jedné třídě. Především každý prvek x leží v třídě $[x]$. Skutečně, $x \in [x]$, protože $x\rho x$ (reflexivita ekvivalence).

Dále ukažme, že každá třída, v níž leží x, je rovna třídě $[x]$. Předpokládejme, že $x \in [y]$ a dokažme, že pak $[y] = [x]$.

Nejprve dokažme inkluzi $[x] \subseteq [y]$. Buď $u \in [x]$ libovolné, pak $u\rho x$. Máme ale $x \in [y]$, takže $x\rho y$. Potom z tranzitivity relace ρ plyne, že $u\rho y$, načež $u \in [y]$. Tudíž, $[x] \subseteq [y]$.

Inkluzi $[x] \supseteq [y]$ dokažte jako cvičení.

Vidíme, že prvky x, y leží v jedné a téže třídě rozkladu právě tehdy, když $x\rho y$.

5.6. Definice. Rozklad z Tvrzení 5.5 se nazývá *rozklad podle ekvivalence ρ*. Množina všech tříd tohoto rozkladu se značí $A/\rho = \{[a] \mid a \in A\}$.

Problém k řešení. Buď ρ ekvivalence na množině A, buď σ ekvivalence na množině B. Zaveďme relaci τ na množině $C = A \times B$ předpisem

$$(a_1, b_1)\gamma(a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1\rho a_2 \wedge b_1\sigma b_2.$$

Ukažte, že γ je relace ekvivalence. Ukažte, že třídy ekvivalence γ jsou právě množiny $U \times V$, kde U je třída ekvivalence ρ a V je třída ekvivalence σ.

Cvičení. Buď ρ relace na množině A.

1. Ukažte, že ρ je reflexivní právě tehdy, když platí $\mathrm{id}_A \subseteq \rho$.
2. Ukažte, že ρ je symetrická právě tehdy, když platí $\rho = \rho^{-1}$.
3. Ukažte, že ρ je tranzitivní právě tehdy, když platí $\rho \circ \rho \subseteq \rho$.

Systém množin obecně je množina, jejíž prvky jsou zase množiny. Buď I nějaká množina (nazývá se *indexová množina*), pro každé $i \in I$ buď A_i zase nějaká množina. Pak $\{A_i \mid i \in I\}$ je systém množin. Značí se též $\{A_i\}_{i \in I}$.

Symbolem $\bigcup_{i \in I} A_i$ označujeme množinu všech prvků, které leží v alespoň jedné z množin A_i. Je to opět množina a nazývá se *sjednocení* systému množin $\{A_i\}_{i \in I}$.

Symbolem $\bigcap_{i \in I} A_i$ označujeme množinu všech prvků, které leží ve všech množinách A_i. Je to opět množina a nazývá se *průnik* systému množin $\{A_i\}_{i \in I}$.

Cvičení. Systém $\{ A_i \mid i \in I \}$ podmnožin množiny A je rozklad právě tehdy, když platí podmínky

(i) Každá podmnožina A_i je neprázdná;

(ii) $A = \bigcup_{i \in I} A_i$;

(iii) mají-li dvě třídy neprázdný průnik, $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, pak se rovnají, $A_i = A_j$.