32. TURNAJ MĚST – PODZIMNÍ ČÁST
(Kategorie SENIOR – soutěžní úlohy)

1. V jisté zemi je 100 měst (města považujte za body v rovině). V průvodci touto zemí je uvedena vzdálenost mezi každými dvěma z nich (celkem je to 4950 údajů).

a) Jedna ze vzdáleností byla v průvodci smazána. Rozhodněte, zda lze tento údaj na základě znalosti zbývajících vzdáleností vždy zjistit.

(2 BODY)

b) Předpokládejme, že bylo smazáno k z těchto údajů a víme, že v této zemi žádná tři města „neleží“ na téže přímce. Určete největší možnou hodnotu k, pro niž lze vždy zjistit všechny smazané údaje (vzdálenosti) na základě znalosti zbývajících údají (vzdáleností).

(3 BODY)

2. Na kruhové dráze vyjelo v jednom okamžiku stejným směrem z jednoho bodu konstantními, navzájem různými rychlostmi $2N$ cyklistů. Jestliže se dva cyklisté po startu znovu objeví ve stejný čas na stejném místě, nazveme tento okamžik jejich *setkáním*. Do 12:00 hod. se libovolní dva cyklisté setkali alespoň jednou, přičemž se nikdy nesetkali tři a více cyklistů v jednom okamžiku. Dokažte, že každý z cyklistů absovoval do 12:00 hod. alespoň N^2 takových *setkání*.

(6 BODŮ)

3. V rovině je dán mnohoúhelník. Délku každé jeho strany dělíme součtem délek všech zbylých stran a pak všechny tyto hodnoty (zlomky) sečteme. Dokažte, že výsledný součet je menší než 2.

(6 BODŮ)

4. Dva mágové spolu soupeří. Na počátku se oba nacházejí 100 m nad mořem. Mohou střídavě vyslovit zaklínadlo: „Chci snížit svou výšku nad mořem o a m a současně snížit výšku soupeře nad mořem o b m“. Každý z mágů má k dispozici stejnou knihu zaklínadel, která se mohou při jejich volbě opakovat. Čísla a, b jsou reálná ($0 < a < b$) a liší se pouze pro různá zaklínadla. Vyhraje ten z mágů, který dosáhne toho, že po vyslovení svého zaklínadla je jeho výška nad mořem dána kladným číslem, avšak soupeřova nikoliv. Existuje taková kniha zaklínadel, že druhý mág vyhraje bez ohledu na strategii prvního. Předpokládáme přitom, že počet všech zaklínadel je:

a) konečný (2 BODY). b) nekonečný (5 BODŮ).

5. Čtyřúhelníku $ABCD$ je vepsána kružnice se středem O, přičemž bod O neleží na žádné z jeho úhlopříček. Víme dále, že střed kružnice opsané trojúhelníku AOC leží na přímce BD. Dokažte, že střed kružnice opsané trojúhelníku BOD leží na přímce AC.

(8 BODŮ)

6. V každém poli tabulky 1000×1000 je buď nula, nebo jednička. Dokažte, že buď lze vyškrtnout 990 řádků tabulky tak, že v libovolném jejím sloupci bude aspoň jedna nevyškrtnutá jednička, nebo že lze vyškrtnout 990 sloupců této tabulky tak, že v libovolném jejím řádku bude aspoň jedna nevyškrtnutá nula.

(12 BODŮ)

7. Čtverec $ABCD$ je rozřezán na shodné pravoúhelníky s celočíselnými délkami stran. Nechť útvar F je sjednocením všech pravoúhelníků, které mají aspoň jeden společný bod s úhlopříčkou AC. Dokažte, že úhlopříčka AC půlí obsah útvaru F.

(14 BODŮ)

32. TURNAJ MĚST – PODZIMNÍ ČÁST

(Kategorie JUNIOR – soutěžní úlohy)

1. V rovině je dána přímka. Pomocí pětikoruny sestrojte dva body libovolné přímky k ní kolmé. Jsou přitom povoleny následující dvě operace: 1. vyznačit bod, přiložit k němu pětikorunu a obtáhnout ji, 2. vyznačit dva body (vzdálené méně než průměr pětikoruny), přiložit k nim pětikorunu a obtáhnout ji. Není možné přiložit pětikorunu k přímce tak, aby se jí dotýkala.

(4 BODY)

2. Petr umí na libovolné úsečce vyznačit body, které tuto úsečku dělí v poměru $n : (n+1)$, kde n je libovolné přirozené číslo. Petr tvrdí, že mu to stačí k tomu, aby na vyznačené úsečce našel bod, který tuto úsečku dělí v libovolném zadaném racionálním poměru. Má pravdu?

(5 BODŮ)

3. Na kruhové dráze vyjelo v jednom okamžiku stejným směrem z jednoho bodu konstantními, navzájem různými rychlostmi 10 cyklistů. Jestliže se dva cyklisté po startu znovu objeví ve stejný čas na stejném místě, nazveme tento okamžik jejich *setkáním*. Do 12:00 hod. se libovolní dva cyklisté setkali alespoň jednou, přičemž se nikdy nesetkali tři a více cyklistů v jednom okamžiku. Dokažte, že každý z cyklistů absovoval do 12:00 hod. alespoň 25 takových *setkání*.

(8 BODŮ)

4. Pravoúhelníková tabulka složená ze čtverců byla rozdělena na domina složená ze dvou čtverců. V každém dominu byla zakreslena jedna úhlopříčka. Ukázalo se, že žádné dvě úhlopříčky nemají společný koncový bod. Dokažte, že právě dva ze čtyř vrcholů pravoúhelníkové tabulky jsou koncovými body úhlopříček.

(8 BODŮ)

5. Je dán pětiúhelník. Délku každé jeho strany jsme vydělili součtem délek zbývajících čtyř stran. Všechny podíly jsme sečetli. Ukažte, že tento součet bude vždy menší než 2.

(8 BODŮ)

6. Na výšce BH ostroúhlého trojúhelníku ABC jsme vyznačili libovolný bod P. Nechť A' a C' jsou po řadě středy stran BC a AB. Kolmice k přímce CP procházející bodem A' protíná kolmici k AP procházející C' v bodě K. Dokažte, že bod K má stejnou vzdálenost od bodů A a C.

(8 BODŮ)

7. U kulatého stolu sedává na poradě N rytířů. Každé ráno je rozesadí čaroděj Merlin v jiném pořadí. Od druhého dne povolil Merlin rytířům udělat během dne několik přesazení následujícím způsobem: dva rytíři sedící vedle sebe se vymění, právě když neseděli vedle sebe první den. Rytíři se snaží sedět v témž pořadí jako některý z předcházejících dnů, potom porada předčasně končí. Určete nejvyšší počet dnů, po které může Merlin rytíře rozesazovat tak, aby porada předčasně neskončila. (Rozesazení, která vzniknou jedno ze druhého otočením kolem stolu se považují za shodná. Merlin u stolu nesedí.)

(12 BODŮ)