32-й Международный математический Турнир городов
Осенний тур
Предварительные решения задач
(подготовили Л.Э.Медников и А.В.Шаповалов)

Сложный вариант, младшие классы

3.1. [4] На плоскости дана прямая. С помощью пятака постройте две точки какой-нибудь прямой, перпендикулярной данной. Разрешаются такие операции: отметить точку, приложить пятак к ней и обвести его; отметить две точки (на расстоянии меньше диаметра пятака), приложить пятак к ним и обвести его. Нет возможности прикладывать пятак к прямой так, чтобы она его касалась.

Решение. Отметим на данной прямой l три точки A, B и C так, чтобы AB и BC были меньше диаметра пятака. Прикладывая пятак к отрезкам AB и BC с одной стороны прямой, построим две окружности. Пусть они второй раз пересекутся в точке D. Прикладывая пятак к отрезкам AB и BC с другой стороны, получим две новые окружности, симметричные старым относительно l. Точка пересечения новых окружностей D' симметрична D относительно l, поэтому $DD' \perp l$.

3.2. [5] Петя умеет на любом отрезке отмечать точки, которые делят этот отрезок пополам или в отношении $n:(n+1)$, где n – любое натуральное число. Петя утверждает, что этого достаточно, чтобы на любом отрезке отметить точку, которая делит его в любом заданном рациональном отношении. Прав ли он?

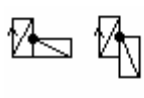
Решение. Петя прав. Рациональное отношение – это отношение целых чисел. Чтобы поделить отрезок в отношении $k : l$, достаточно поделить его на $m = k + l$ равных частей. Покажем, как это сделать, индукцией по q. *База* : $m = 1$.

Пусть мы умеем делить отрезок на любое число частей, меньшее m. Если $m = 2n$, разделим отрезок пополам, а потом каждую половину – на n частей. Если $m = 2n + 1$, разделим отрезок в отношении $n:(n+1)$, а затем меньший кусок поделим на n частей, а больший – на $n + 1$ часть.

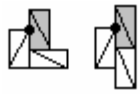
3.3. [8] На кольцевом треке 10 велосипедистов стартовали одновременно из одной точки и поехали с постоянными различными скоростями (в одну сторону). Если после старта два велосипедиста снова оказываются одновременно в одной точке, назовем это встречей. До полудня каждые два велосипедиста встретились хотя бы раз, при этом никакие три или больше не встречались одновременно. Докажите, что до полудня у каждого велосипедиста было не менее 25 встреч.

Решение. Пусть S – длина трека, $v_1 < v_2 < \ldots < v_{10}$ – скорости велосипедистов,
$u = \min\{v_2 - v_1, v_3 - v_2, \ldots, v_{10} - v_9\}$. Велосипедисты с номерами $i < j$ встречаются через промежутки времени $\dfrac{S}{v_j - v_i}$. Ясно, что самый большой из промежутков равен $\dfrac{S}{u}$, и нам придется ждать до конца этого промежутка, чтобы каждый встретился со всеми остальными. Поскольку $v_j - v_i \geq (j - i)u$, то за это время велосипедисты с номерами i и j успеют встретиться не менее $j - i$ раз. Значит, у 5-го велосипедиста будет не менее $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ встреч с теми, у кого номер меньше, и не менее $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ встреч – с теми, у кого больше. Итого не менее 25 встреч. Для 6-го оценка та же, а у остальных еще больше.

3.4. [8] Клетчатый прямоугольник разбит на двуклеточные доминошки. В каждой доминошке провели одну из двух диагоналей. Оказалось, что никакие диагонали не имеют общих концов. Докажите, что ровно два из четырех углов прямоугольника являются концами диагоналей.



Решение. Достаточно доказать, что в любых двух доминошках, граничащих по отрезку, проведенные диагонали выходят либо обе из правых нижних, либо обе из левых нижних углов. Предположим противное и найдем *плохую пару*: две соприкасаю-щиеся доминошки с диагоналями разных направлений. Ясно, что общий отрезок не может быть целой стороной обеих доминошек. Принципиально возможны лишь два случая – см. верхний рис. В обоих случаях однозначно определяются *центр* (конец диагонали на середине стороны) и *направление пары* (на-правление от центра к концу другой диагонали на той же стороне) – на рис. это *жирная точка и стрелка*. Рассмотрим плохую пару, чей центр ближе всего к стороне, на которую показывает направление пары. Заметим, что положение доминошки, примы-кающей к плохой паре в ее центре, и диагональ в этой доминошке тоже опре-делены однозначно (см. нижний рис.). Но тогда возникает новая плохая пара, чей центр ближе к указанной стороне. Противоречие доказывает, что плохих пар нет.



2-е решение. 1) Пусть левый нижний угол не является концом диагонали доминошки. Рассмотрим следующую доминошку, примыкающую к нижней стороне. Легко видеть, что диагональ в ней имеет то же “направление”, что и в угловой. Это верно и для следующей справа доминошки и т.д. Следовательно, из *правого нижнего угла* выходит диагональ.

Итак, доказано, что *хотя бы из одного угла* диагональ доминошки выходит.

2) Пусть из левого нижнего угла A выходит диагональ AB *первой* доминошки. К первой доминошке обязательно примыкает (по стороне или половине стороны) *вторая* доминошка, для которой B также служит вершиной. Поэтому диагональ второй доминошки имеет то же направление, что и AB. Заметим также, что сумма “координат” правой верхней вершины (C) у второй доминошки больше, чем у первой. Ко второй доминошке примыкает *третья*, для которой C является вершиной, и рассуждения можно повторить. В результате будет построена *цепь* из доминошек с диагоналями одного направления, соединяющая левый нижний и правый верхний углы прямоугольника. Следовательно, в правый верхний угол также входит диагональ доминошки.

3) Пусть из правого нижнего угла также выходит диагональ. Тогда можно построить цепь доминошек, соединяющую правый нижний и левый верхний углы прямоугольника. Эта цепь должна “пересечься” с ранее построенной цепью, то есть имеет с ней общую доминошку. Противоречие, так как диагонали доминошек второй цепи “направлены” не так, как в первой.

3.**5**. Имеется пятиугольник. Для каждой стороны поделим ее длину на сумму длин всех остальных сторон. Затем сложим все получившиеся дроби. Докажите, что полученная сумма будет всегда меньше 2.

Решение. Каждая сторона меньше суммы остальных, поэтому сумма остальных больше полупериметра. Значит, заменив каждый знаменатель на полупериметр, мы увеличим сумму. Но теперь она равна 2.

3.**6**. [8] В остроугольном треугольнике ABC на высоте BH выбрана произвольная точка P. Точки A' и C' – середины сторон BC и AB соответственно. Перпендикуляр, опущенный из A' на CP, пересекается с перпендикуляром, опущенным из C' на AP, в точке K. Докажите, что точка K равноудалена от точек A и C.

Решение 1. Проведем в треугольниках ABP и CBP средние линии $C'C''$ и $A'A''$. Они равны по длине, и они перпендикулярны AC (так как обе параллельны отрезку BP и равны его половине). Проведем из точки K отрезок KK', сонаправленный с $C'C''$ и $A'A''$ и равный им по длине. Тогда $KC'C''K'$ и $KA'A''K'$ – параллелограммы, откуда $K'C''$ и $K'A''$ – срединные перпендикуляры к сторонам AP и CP треугольника APC. Значит K' – центр описанной окружности этого треугольника и лежит на срединном перпендикуляре к AC. Но тогда там лежит и точка K (так как прямая KK' перпендикулярна AC).

Решение 2. Рассмотрим гомотетию (с центром в точке пересечения медиан), переводящую треугольник ABC в треугольник $A'B'C'$, образованный его средними линиями. Эта гомотетия переводит высоты треугольника APC, опущенные из вершин A и C, в параллельные им прямые –указанные в условии перпендикуляры. Следовательно, ортоцентр треугольника APC переходит в точку K. Значит, K – ортоцентр треугольника $A'B'C'$, то есть лежит на высоте этого треугольника, опущенной из вершины B', а это – серединный перпендикуляр к отрезку AC.

3.**7**. [12] За круглым столом заседают N рыцарей. Каждое утро чародей Мерлин сажает их в другом порядке. Начиная со второго дня Мерлин разрешил рыцарям делать в течение дня сколько угодно пересадок такого вида: два сидящих рядом рыцаря меняются местами, если только они не были соседями в первый день. Рыцари стараются сесть в том же порядке, что и в какой-нибудь из предыдущих дней: тогда заседания прекратятся. Какое наибольшее число дней Мерлин гарантированно может проводить заседания? (Рассадки, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми. Мерлин за столом не сидит.)

Решение. Занумеруем в первый день сидящих рыцарей по часовой стрелке от 1 до N. Порядок за столом будем описывать строкой этих номеров, перечисляя рыцарей по часовой стрелке. Назовем *избранными* порядки вида $k, k-1, \ldots, 2, 1, k+1, k+2, \ldots, N$ для $k = 1, 2, 3, \ldots, N-1$ (N-й избранный порядок совпадает с (N–1)-м, поэтому он не нужен). Докажем, что из любого порядка можно пересесть в избранный. Для этого осуществим пересадку, при которой *левая* группа k, $k-1$, …, 2, 1 *максимальная из возможных*. Покажем, что остальные рыцари при этом автоматичееки сидят в нужном порядке ($k+1$, $k+2$, …, N). Пусть это не так. Будем двигать число $k+1$ по часовой стрелке. Если по пути $k+1$ упрется в $k+2$, будем двигать эту пару. Упершись парой в $k+3$, будем двигать тройку и т. д. В итоге до k доедет «поезд» $k+1$, $k+2$, …, $k+m$. При этом $k+m < N$ (иначе никакого движения вообще не было). Прогоним все числа поезда, кроме $k+1$, сквозь левую группу, а $k+1$ присоединим к ней. Противоречие с максимальностью левой группы.

Ясно, что пересаживаясь каждый день в избранном порядке, рыцари повторятся не позднее, чем на N-й день.

Пусть для произвольного порядка Мерлин выполнит такой обход: двигаясь все время по часовой стрелке, пройдет от 1-го до 2-го, затем до 3-го, до 4-го, …, до N-го и снова до 1-го. Свяжем с порядком *число оборотов* Мерлина вокруг стола. Легко убедиться, что при разрешенной пересадке двух рыцарей число оборотов не меняется. Однако числа оборотов избранных порядков различны (для k-го порядка число оборотов равно k), поэтому избранные порядки с разными k пересадками друг из друга не получаются. Рассаживая рыцарей в очередном избранном порядке, Мерлин может получить первое повторение не ранее N-го дня.

Сложный вариант, старшие классы

4.**1**. В некой стране 100 городов (города считайте точками на плоскости). В справочнике для каждой пары городов имеется запись, каково расстояние между ними (всего 4950 записей).

а) [2] Одна запись стерлась. Всегда ли можно однозначно восстановить ее по остальным?

б) [3] Пусть стерлись k записей, и известно, что в этой стране никакие три города не лежат на одной прямой. При каком наибольшем k всегда можно однозначно восстановить стершиеся записи?

Решение. **а**) Не всегда. Пусть 98 точек лежат на одной прямой l, а две точки A и B – вне нее (где A и B не симметричны относительно l). Если неизвестно расстояние между A и B, то восстановить его нельзя: при замене точки B на B', симметричную B относительно l, остальные расстояния не изменятся, а расстояние AB' будет отличаться от AB.

б) При $k = 96$.

Решение 1. Покажем, что если количество городов $n \geq 4$, то $k = n-4$. Для $n=4$ утверждение легко проверяется. Пусть оно верно для n, докажем его для $n+1$.

Если для некоторого города A стёрты его расстояния для n-2 городов, то его можно симметрично отразить – с сохранением всех известных расстояний – относительно прямой, соединяющей остальные два города (назовем их B и C). Неизвестные нам расстояния при этом изменятся, так как на прямой, соединяющей B и C, не находится никакой другой город. Поэтому $k \ge n$-3.

Пусть стёрто не более n-3 записей. Выберем город A, для которого стёрто хотя бы одно расстояние до другого города, и рассмотрим остальные n городов. Между ними стёрто не более n-4 расстояний, и по предположению индукции можно восстановить все эти расстояния, а тогда и взаимное расположение этих городов (углы между соединяющими их отрезками). Для города A известны расстояния по крайней мере до 3 городов, и это позволяет однозначно восстановить его расположение на плоскости, а тем самым и расстояния до остальных городов.

Решение 2.

Найдется точка A, расстояния от которой по крайней мере до 98 других точек известны (в противном случае известно не более $100\cdot97:2 < 4950 - 96$ расстояний). Найдутся также две точки B и C из этих 98, расстояние между которыми известно. Итак, есть треугольник ABC с известными сторонами. Расположим его на плоскости и докажем, что расположение остальных точек определяется однозначно.

Найдется точка D, для которой известны расстояния до всех вершин треугольника ABC (иначе неизвестны не менее 97 расстояний). Тем самым положение точки D определено однозначно.

Найдется не менее 48 точек, расстояния от которых по крайней мере до трех из точек A, B, C, D известны (иначе неизвестны не менее $49\cdot2 = 98$ расстояний). Тем самым положения эти точек также определены.

Теперь для всех точек, кроме одной, известны расстояния по крайней мере до трех из уже "расставленных" 52 точек (иначе неизвестны не менее $2\cdot52 = 104$ расстояния).

Наконец для последней точки известны расстояния по крайней мере до трех остальных. Значит, и ее положение определено однозначно.

Увеличить k до 97 нельзя. Пусть неизвестны расстояния от точки A до всех точек, кроме B и C. Тогда положение точки A определено с точностью до симметрии относительно прямой BC, значит, расстояния от нее до остальных точек не восстанавливаются.

Решение для знатоков. Рассмотрим граф со 100 вершинами и 96 ребрами, соответствующими *стертым* записям. Этот граф содержит не менее 4 компонент связности. Зафиксируем по вершине (A, B, C, D) в каждой из этих 4 компонент. Все расстояния между этими вершинами известны.

Рассмотрим произвольную вершину первой компоненты. Известны ее расстояния до точек B, C, D, следовательно, положение соответствующего города на плоскости определено однозначно. Аналогична ситуация с вершинами оставшихся компонент.

4.2. [6] На кольцевом треке $2N$ велосипедистов стартовали одновременно из одной точки и поехали с постоянными различными скоростями (в одну сторону). Если после старта два велосипедиста снова оказываются одновременно в одной точке, назовем это встречей. До полудня каждые два велосипедиста встретились хотя бы раз, при этом никакие три или больше не встречались одновременно. Докажите, что до полудня у любого велосипедиста было не менее N^2 встреч.

Решение. Пусть S – длина трека, $v_1 < v_2 < \ldots < v_{2N}$ – скорости велосипедистов, $u = \min\{v_2 - v_1, v_3 - v_2, \ldots, v_{2N} - v_{2N-1}\}$. Велосипедисты с номерами $i < j$ встречаются через промежутки времени $\dfrac{S}{v_j - v_i}$. Ясно, что самый большой из промежутков равен $\dfrac{S}{u}$, и нам придется ждать до конца этого промежутка, чтобы каждый встретился со всеми остальными. Поскольку $v_j - v_i \ge (j - i)u$, то за это время велосипедисты с номерами i и j успеют встретиться не менее $j - i$ раз. Значит, у N-го велосипедиста будет не менее

$1 + 2 + \ldots + (N - 1) = \dfrac{N(N-1)}{2}$ встреч с теми, у кого номер меньше, и не менее

$1 + 2 + \ldots + N = \dfrac{N(N+1)}{2}$ встреч – с теми, у кого больше. Итого не менее N^2 встреч. Для (N+1)-го оценка та же, а у остальных еще больше (при сдвиге номера от середины в короткой сумме отнимается меньше, чем прибавляется в длинной).

4.3. [6] Имеется многоугольник. Для каждой стороны поделим ее длину на сумму длин всех остальных сторон. Затем сложим все получившиеся дроби. Докажите, что полученная сумма будет всегда меньше 2.

Решение. Каждая сторона меньше суммы остальных, поэтому сумма остальных больше полупериметра. Значит, заменив каждый знаменатель на полупериметр, мы увеличим сумму. Но теперь она равна 2.

4.4. Два мага сражаются друг с другом. Вначале они оба парят над морем на высоте 100 м. Маги по очереди применяют заклинания вида “уменьшить высоту парения над морем на a м у себя и на b м у соперника”, где a, b – действительные числа, $0 < a < b$. Набор заклинаний у магов один и тот же, их можно использовать в любом порядке и неоднократно. Маг выигрывает дуэль, если после чьего-либо хода его высота над морем будет положительна, а у соперника – нет. Существует ли такой набор заклинаний, что второй маг может гарантированно выиграть (как бы ни действовал первый), если при этом число заклинаний в наборе

а) [2] конечно;

б) [5] бесконечно?

Решение. а) Нет. Пусть первый маг всегда применяет заклинание с наибольшей разностью $b - a$. Тогда после ответного хода разность высот первого и второго как минимум 0. В результате после нескольких ходов разность всегда неотрицательна и, значит, второй не выигрывает.

б) Да, это возможно. Рассмотрим произвольную убывающую последовательность положительных чисел $\{a_n\}$, где $a_n < 50$, (например $a_n = {}^1/_n$) и пусть в n-м заклинании $a = a_n$, $b = 100 - a_n$. Ответив на n-е заклинание заклинанием с номером $m > n$, второй маг выиграет: высота первого станет равной $a_m - a_n < 0$, а высота второго $a_n - a_m > 0$.

4.5. [8] Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O, причем точка O не лежит ни на одной из диагоналей этого четырехугольника. Известно, что центр описанной окружности треугольника AOC лежит на прямой BD. Докажите, что центр описанной окружности треугольника BOD лежит на прямой AC.

Решение. Пусть R – радиус окружности, P – середина AC, Q – середина BD, O_1 и O_2 – центры описанных окружностей треугольников AOC и BOD соответственно.

Опустим перпендикуляр O_1N на радиус OA. Из подобия треугольников AOP и O_1ON получаем $OP:OA = ON:OO_1$, то есть $OP \cdot OO_1 = {}^1/_2 R^2$. Аналогично $OQ \cdot OO_2 = {}^1/_2 R^2$.

Поэтому $OP:OQ = OO_2:OO_1$, значит, треугольники OPO_2 и OQO_1 подобны (у них общий угол при вершине O). По условию угол OQO_1 прямой, следовательно, и угол OPO_2 прямой, что и требовалось доказать.

Замечание для знатоков. Прямые AC и BD – поляры соответственно точек O_1 и O_2 относительно окружности радиуса ${}^R/_2$ с центром O. Поэтому утверждение задачи есть переформулировка известной теоремы:

если точка X лежит на поляре точки Y, то точка Y лежит на поляре точки X.

Выше как раз приведено одно из доказательств этой теоремы.

Решение для знатоков. Утверждение задачи есть частный случай следующего утверждения.

Пусть центр окружности Ω_1 *лежит на радикальной оси окружностей* Ω_2 и Ω_3, *а центр окружности* Ω_2 *лежит на радикальной оси окружностей* Ω_1 *и* Ω_3. *Тогда центр окружности* Ω_3 *лежит на радикальной оси окружностей* Ω_1 и Ω_2.

(В нашем случае Ω_1, Ω_2 и Ω_3 – описанные окружности треугольников ABC, AOC и BOD соответственно.)

Доказательство сводится к тривиальной проверке следствия:

$$O_1O_2^2 - r_2^2 = O_1O_3^2 - r_3^2,\ O_2O_1^2 - r_1^2 = O_2O_3^2 - r_3^2 \ \Rightarrow\ O_3O_1^2 - r_1^2 = O_3O_2^2 - r_2^2.$$

4.6. [12] В каждой клетке таблицы 1000×1000 стоит ноль или единица. Докажите, что можно либо вычеркнуть 990 строк так, что каждом столбце будет хотя бы одна невычеркнутая единица, либо вычеркнуть 990 столбцов так, что в каждой строке будет хотя бы один невычеркнутый нуль.

Решение. Будем по одному *выбирать* некоторые ряды – столбцы и строки. *Плохой* столбец пересекается со всеми выбранными строками по нулям, *плохая* строка – с всеми выбранными столбцов по единицам. Вначале ничего не выбрано, и вся ряды плохие. Без ограничения общности можно считать, что в таблице единиц не меньше, чем нулей. Тогда выберем строку, где единиц не меньше половины. Количество плохих столбцов уменьшится как минимум вдвое. Если найдется строка, у которой в пересечении с плохими столбцами единиц не меньше, чем нулей, выберем ее. Так продолжаем выбирать, пока возможно. Далее есть 3 варианта.

1) Выбрано менее 10 строк, и плохих столбцов не осталось. Добавляем к выбранным любые строки до 10, остальные вычеркиваем.

2) Выбрано 10 строк. Тогда осталось менее $1000:2^{10}$ плохих столбцов, то есть их не осталось вообще. Вычеркиваем все строки, кроме избранных.

3) Выбрано менее 10 строк, и у каждой строки на пересечении с плохими столбцами нулей больше, чем единиц. Тогда в плохих столбцах и всего нулей больше, чем единиц. Будем выбирать плохие столбцы по тому же принципу: берем столбец, если на его пересечении с плохими строками нулей не меньше, чем единиц. Если в итоге плохие строки закончатся, мы победили. Предположим однако, что плохие строки остались, и на пересечении каждого столбца с ними единиц больше, чем нулей. Но тогда получается противоречие: если считать по строкам, то в клетках, стоящих на пересечении плохих строк с плохими столбцами, больше нулей, а если считать по столбцам, – больше единиц.

2-е решение. Индукцией по $m + n$ докажем более общее утверждение.

Пусть в каждой клетке таблицы, где менее 2^m строк и менее 2^n столцбов, стоит ноль или единица. Тогда можно либо оставить не более m столбцов так, что в каждой строке будет хотя бы один нуль. либо оставить не более n строк так, что каждом столбце будет хотя бы одна единица.

База (таблица 1×1) очевидна. *Шаг индукции*. Пусть в таблице T нулей не меньше, чем единиц. Тогда есть строка , где нулей меньше половины. Отметим эту строку и оставим только столбцы, где в ней стоят единицы (если таких нет то все доказано). В полученной таблице T_1 стобцов меньше, чем 2^{n-1}, и по предположению индукции в T_1 можно оставить не более m “хороших” столбцов (которые будут такими и для T) или не более $n - 1$ “хорошей” строки. В последнем случае, вернув этим строкам исходную длину и добавив отмеченную строку, получим “хороший” набор строк для T.

4.7. [14] Квадрат *ABCD* разрезан на одинаковые прямоугольники с целыми длинами сторон. Фигура *F* является объединением всех прямоугольников, имеющих общие точки с диагональю *AC*. Докажите, что *AC* делит площадь фигуры *F* пополам.

Решение. Разобьем квадрат на единичные клетки. Каждый прямоугольник накрывает только целые клетки. Рассмотрим все составленные из клеток прямоугольники нужного размера. Если такой прямоугольник имеет общие точки с *AC*, назовем его *важным*. Ниже показано, как вписать в клетки числа, чтобы для каждого важного прямоугольника сумма вписанных в него чисел была равна разности площадей его частей над *AC* и под *AC*, а для каждого не важного и у квадрата в целом такая сумма равна нулю. Так как дополнение фигуры *F* разбивается на не важные прямоугольники, то и сумма чисел внутри *F* будет равна нулю, что равносильно утверждению задачи.

Рассмотрим (клетчатые) диагонали, параллельные *AC*. Числа в клетках каждой диагонали будут одинаковы. Пусть размер прямоугольника $m \times n$. В клетки диагонали *AC* впишем нули, в ближайшие $m + n - 1$ диагоналей над ней – единицы, симметрично *AC* – минус единицы. Теперь для важных прямоугольников сумма какая надо. Рассмотрим ближайшую к *AC* незаполненную диагональ. Накроем любую ее клетку прямоугольником так, чтобы она была в нем единственной не заполненной. Нетрудно убедиться, что число клеток в его пересечении с заполненной диагональю не зависит ни от выбора незаполненной клетки, ни от положения прямоугольника. Тогда и сумма в заполненных клетках прямоугольника от этого не зависит. Впишем эту сумму с обратным знаком в каждую клетку диагонали и перейдем к заполнению следующей диагонали. Так действуем, пока все клетки не будут заполнены. В симметричных относительно AC клетках, очевидно, стоят противоположные числа, поэтому общая сумма равна нулю. Сумма в каждом не важном прямоугольнике равна нулю, так как в нем последней заполнялась самая дальняя от AC клетка.

В таблице приведен пример заполнения клеток квадрата 12×12 для прямоугольников 3×4:

0	1	1	1	1	1	1	–11	13	1	**–11**	1
–1	0	1	1	1	1	1	1	–11	13	1	–11
–1	–1	0	1	1	1	1	1	1	–11	13	1
–1	–1	–1	0	1	1	1	1	1	1	–11	13
–1	–1	–1	–1	0	1	1	1	1	1	1	**–11**
–1	–1	–1	–1	–1	0	1	1	1	1	1	1
–1	–1	–1	–1	–1	–1	0	1	1	1	1	1
11	–1	–1	–1	–1	–1	–1	0	1	1	1	1
–13	11	–1	–1	–1	–1	–1	–1	0	1	1	1
–1	–13	11	–1	–1	–1	–1	–1	–1	0	1	1
11	–1	–13	11	–1	–1	–1	–1	–1	–1	0	1
–1	11	–1	–13	11	–1	–1	–1	–1	–1	–1	0

2-е решение. Разобьем квадрат на единичные клетки. Занумеруем диагонали, параллельные AC, начиная с левого нижнего угла B. Назовем *кирпичами k-го сорта* те прямоугольники разбиения, у которых левая нижняя клетка принадлежит k-й диагонали.

Лемма. Количество кирпичей каждого сорта не зависит от разрезания.

Доказательство. Заметим, что кирпич n-го сорта независимо от своего положения занимает определенное число клеток k-й диагонали (зависящее только от n и k).

Кирпич 1-го сорта один. Пусть для кирпичей первых $k - 1$ сортов утверждение уже доказано. Тогда и количество клеток, занимаемых ими на k-й диагонали, от разбиения не зависит. А число кирпичей k-го сорта равно числу оставшихся на этой диагонали клеток.

Вернемся к задаче. *Под* диагональю AC лежат кирпичи нескольких первых сортов. Значит, их количество не зависит от разбиения. Повернув квадрат на 180°, мы получим новое разбиение с тем же числом кирпичей *под* диагональю AC. Следовательно, в исходном разбиении количество кирпичей *под* диагональю равно количеству кирпичей *над* диагональю. Отсюда, очевидно, следует утверждение задачи.