32-й Международный математический Турнир городов
Осенний тур
Предварительные решения задач
(подготовили Л.Э.Медников и А.В.Шаповалов)

Базовый вариант, младшие классы

1.1. [4] В пифагоровой таблице умножения выделили прямоугольную рамку толщиной в одну клетку, причем каждая сторона рамки состоит из нечетного числа клеток. Клетки рамки поочередно раскрасили в два цвета – черный и белый. Докажите, что сумма чисел в черных клетках равна сумме чисел в белых клетках. Пифагорова таблица умножения – это клетчатая таблица, в которой на пересечении m-й строки и n-го столбца стоит число mn (для любых натуральных m и n).

Решение. Продолжим шахматную раскраску на всю таблицу. Заметим, что среднее арифметическое чисел, стоящих в двух одноцветных клетках одного ряда (строки или столбца) равно числу в клетке, стоящей посередине между ними. Пусть углы – черные. Каждое белое число рамки равно полусумме своих черных соседей по рамке, при этом каждое черное число входит в две полусуммы. Сложив эти равенства, получим, что сумма белых равна сумме черных.

1.2. [4] Равнобедренная трапеция описана около окружности. Докажите, что биссектриса тупого угла этой трапеции делит ее площадь пополам.

Решение 1. Боковая сторона AB трапеции $ABCD$ равна полусумме оснований BC и AD. Пусть биссектриса тупого угла B пересекает прямую AD в точке E. $\angle AEB = \angle EBC = \angle ABE$, поэтому $AE = AB$. Следовательно, точка E лежит внутри основания AD. Площадь треугольника ABE, отсеченного биссектрисой, равна половине площади трапеции, поскольку длина стороны AB равна средней линии трапеции, а высоты треугольника и трапеции совпадают.

Решение 2. Ось симметрии трапеции и биссектриса пересекаются в центре вписанной окружности, и вместе с основаниями высекают два очевидно равных прямоугольных треугольника с катетами, равными радиусу и половине меньшего основания. Ось симметрии делит трапецию на две равные половинки. Прибавив к половинке один треугольник и отняв другой, получим часть, отсеченную биссектрисой. Значит, площадь части равна площади половинки.

Уточнение: треугольники не вылезают за пределы трапеции, так как точка пересечения биссектрисы с противоположным (длинным) основанием удалена от его середины на половину короткого.

1.3. [4] На шахматной доске 8×8 стоит кубик (нижняя грань совпадает с одной из клеток доски). Его прокатили по доске, перекатывая через ребра, так что кубик побывал на всех клетках (на некоторых, возможно, несколько раз). Могло ли случиться, что одна из его граней ни разу не лежала на доске?

Решение. Могло. Поставим кубик на клетку a1 и перекатим кубик по маршруту a1-a2-b2-b1. При этом он сдвинулся на одну клетку вправо, снова стоит на нижней грани, а его верхняя грань ни разу не лежала на доске. Аналогично можно сдвинуть кубик на клетку вверх. Перемещая кубик подобным образом в соседние клетки, мы сможем обойти всю доску.

1.4. [4] В некоторой школе более 90% учеников знают английский и немецкий языки, и более 90% учеников знают английский и французский языки. Докажите, что среди учеников, знающих немецкий и французский языки, более 90% знают английский язык.

Решение. Пусть a школьников знают все 3 языка, b – только английский и немецкий, c – только английский и французский, d – только немецкий и французский. По условию $a + b \geq 9(c + d)$, $a + c \geq 9(b + d)$. Взяв полусумму, получим $a \geq 9d + 4(b + c)$, тем более $a \geq 9d$, а это и требовалось.

1.5. [4] Концы N хорд разделили окружность на $2N$ дуг единичной длины. Известно, что каждая из хорд делит окружность на две дуги четной длины. Докажите, что число N четно.

Решение. Раскрасим вершины поочередно в белый и черный цвета. Хорды соединяют вершины одного цвета. Значит, N белых вершин разбились на пары, и N – четно.

Базовый вариант, старшие классы

2.1. Банкомат обменивает монеты: дублоны на пистоли и наоборот. Пистоль стоит s дублонов, а дублон – $^1/_s$ пистолей, где s – не обязательно целое. В банкомат можно вбросить любое число монет одного вида, после чего он выдаст в обмен монеты другого вида, округляя результат до ближайшего целого числа (если ближайших чисел два, выбирается большее).

а) [2] Может ли так быть, что обменяв сколько-то дублонов на пистоли, а затем обменяв полученные пистоли на дублоны, мы получим больше дублонов, чем было вначале?

б) [3] Если да, то может ли случиться, что полученное число дублонов еще увеличится, если проделать с ними такую же операцию?

Решение а) Может. Пусть, например, $s = 3$. Обменяв 5 дублонов, получим 2 пистоля, а обменяв пистоли, получим 6 дублонов.

Решение б) Не может. Пусть $s < 1$. Обменяв n дублонов, мы получим $ns^{-1} + \varepsilon$ пистолей, где $|\varepsilon| \leq {}^1/_2$. Обменяв их снова на дублоны, получим $(ns^{-1} + \varepsilon)s < n + {}^1/_2$ дублонов, поэтому больше n дублонов мы не получим уже при первой паре обменов.

Пусть $s > 1$ и после первого обмена мы получим n пистолей. Как показано выше, за два обмена из этих пистолей мы получим не более n пистолей, следовательно, и число дублонов после 4-го обмена не больше, чем после второго.

2.2. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны и пересекаются в точке O. Известно, что сумма радиусов окружностей, вписанных в треугольники AOB и COD, равна сумме радиусов окружностей, вписанных в треугольники BOC и DOA. Докажите, что

а) [2] четырехугольник $ABCD$ – описанный;

б) [3] четырехугольник $ABCD$ симметричен относительно одной из своих диагоналей.

Пусть $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AO = u$, $BO = x$, $CO = v$, $DO = y$.

Решение а) Как известно, радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен $(k+l-m)/2$, где k,l – катеты, m – гипотенуза. Поэтому

$$(u + x - a) + (y + v - c) = (x + v - b) + (u + y - d) \quad \Leftrightarrow \quad a + c = b + d.$$

Следовательно, четырехугольник $ABCD$ – описанный.

б) $a + c = b + d \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{u^2 + x^2} + \sqrt{v^2 + y^2} = \sqrt{v^2 + x^2} + \sqrt{u^2 + y^2} \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad (u^2 + x^2)(v^2 + y^2) = (u^2 + y^2)(v^2 + x^2) \quad \Leftrightarrow \quad v^2x^2 + u^2y^2 = u^2x^2 + v^2y^2 \quad \Leftrightarrow \quad (u^2 - v^2)(x^2 - y^2) = 0.$

Следовательно, $u = v$ или $x = y$. Это и значит, что четырехугольник симметричен.

2.3. [5] Полицейский участок расположен на прямой дороге, бесконечной в обе стороны. Некто угнал старую полицейскую машину, максимальная скорость которой составляет 90% от максимальной скорости новой машины. В некоторый момент в участке спохватились и послали вдогонку полицейского на новой полицейской машине. Однако вот беда: полицейский не знал, ни когда машина была угнана, ни в каком направлении вдоль дороги уехал угонщик. Сможет ли полицейский поймать угонщика?

Решение 1. Сможет. Пусть полицейский выезжает в 12.00 и едет “вправо” в течение времени, достаточного, чтобы догнать угонщика при условии, что тот выехал не позже 11.00 (то есть 9 часов). Далее он разворачивается и едет “влево”, в течение времени, достаточного, чтобы догнать угонщика при условии, что тот выехал не позже 10.00 (поскольку скорость полицейского больше, это время конечно). Затем он разворачивается и едет “вправо” в течение времени, достаточного, чтобы догнать угонщика при условии, что тот выехал не позже 9.00. И так далее.

Решение 2 (написал один из участников в Москве). Отправим мысленно в обе стороны дороги двух помощников полицейского, едущих с постоянной промежуточной скоростью (большей, чем скорость угонщика, но меньшей, чем скорость полицейского). Пусть наш полицейский догонит сначала первого помощника, потом – второго, потом – снова первого, потом – снова второго и т.д. (это возможно, так как скорость помощников меньше). Ясно, что когда-нибудь один из помощников перегонит угонщика (и поедет дальше), а значит, наш полицейский когда-то догонит угонщика.

2.4. [5] Квадратная доска разделена на n^2 прямоугольных клеток $n-1$ горизонтальными и $n-1$ вертикальными прямыми. Клетки раскрашены в шахматном порядке. Известно, что на одной диагонали все n клеток черные и квадратные. Докажите, что общая площадь всех черных клеток доски не меньше общей площади белых.

Решение 1. Занумеруем вертикали и горизонтали доски, начиная от черного угла. Пусть расстояния между прямыми равны соответственно $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Площади клеток равны x_ix_j, причем для черных клеток $i+j$ четно, а для белых – нечетно. Разность между черной и белой площадью равна

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 + (x_1x_3 + x_1x_5 + \ldots + x_2x_4 + x_2x_6 + \ldots) - 2(x_1x_2 + x_1x_4 + \ldots + x_2x_3 + x_2x_5 + \ldots) =$$
$$= (x_1 - x_2 + x_3 - \ldots)^2 > 0.$$

Решение 2. Занумеруем вертикали и горизонтали доски, начиная от черного угла. Черные клетки бывают двух сортов: одни стоят на пересечении четных полос, другие – на пересечении нечетных. Выкидывая сначала четные горизонтали, потом четные вертикали, мы получим черный квадрат со стороной a. Выкидывая нечетные полосы, получим черный квадрат со стороной b. Итак, черная площадь a^2+b^2, а вся – $(a+b)^2$. Но неравенство $2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2$ равносильно очевидному неравенству $(a-b)^2 \geq 0$.

2.5. [5] 55 боксеров участвовали в турнире по системе "проигравший выбывает". Бои шли последовательно. Известно, что у участников каждого боя число предыдущих побед отличалось не более чем на 1. Какое наибольшее число боев мог провести победитель турнира?

Решение. 8 боев. Обозначим u_k k-е число Фибоначчи ($u_1=u_2=1$, $u_k=u_{k-1}+u_{k-2}$ при $k\geq3$). Докажем по индукции, что

а) если победитель провел не меньше n боев, то число участников не меньше u_{n+2};

б) существует турнир с u_{n+2} участниками, победитель которого провел n боев.

База ($n = 1$, $u_3 = 2$) очевидна.

Шаг индукции. а) Пусть победитель A выиграл последний бой у боксера B. Оставшиеся поединки фактически распадаются на два турнира: один из них выиграл A, а второй – B. В первом турнире победитель A провел не меньше $n-1$ боя, значит, число участников не меньше u_{n+1}. Во втором турнире победитель B провел не меньше $n-2$ боев, значит, число участников не меньше u_n. А в исходном турнире число участников не меньше

$$u_{n+1} + u_n = u_{n+2}.$$

б) Достаточно свести в заключительном поединке победителя турнира с u_{n+1} участниками, выигравшего $n-1$ бой, и победителя турнира с u_n участниками, выигравшего $n-2$ боя.

Поскольку $55 = u_{10}$, отсюда следует ответ.