32. TURNAJ MĚST – PODZIMNÍ ČÁST
(Kategorie SENIOR – přípravné úlohy)

1. Bankomat mění mince dublonů na pistoly a naopak. Jeden dublon odpovídá s pistolům a jeden pistol odpovídá $1/s$ dublonům (s není nutně přirozené číslo). Do bankomatu můžeme vložit libovolný počet mincí téhož typu, které nám bankomat vymění za odpovídající počet mincí druhého typu. Vydaný počet mincí vznikne zaokrouhlením skutečného počtu mincí v převodním kurzu, a to k nejbližšími celému číslu. Existují-li dvě nejbližší celá čísla, bankomat zaokrouhluje k většímu z nich.

a) Rozhodněte, zda je možno po výměně určitého počtu dublonů na pistole a poté vydaných pistolů zpět na dublony získat větší počet dublonů než před výměnou.

(2 BODY)

b) V případě, že ano, rozhodněte, zda opakovaním stejné operace (výměnou všech dublonů), lze získat opět větší počet dublonů.

(3 BODY)

2. Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$ s navzájem kolmými úhlopříčkami, které se protínají v bodě O. Součet velikostí poloměrů kružnic vepsaných trojúhelníkům AOB a COD je roven součtu velikostí poloměrů kružnic vepsaných trojúhelníkům BOC a DOA. Dokažte, že

a) čtyřúhelník $ABCD$ je tečnový,

(2 BODY)

b) čtyřúhelník $ABCD$ je souměrný podle jedné ze svých úhlopříček.

(3 BODY)

3. Policejní stanice je umístěna na přímé cestě, které je nekonečná v obou směrech. Zloděj ukradl policistům staré auto, které je schopno dosáhnout nejvýše 90 % maximální rychlosti nových policejních vozů. Po určité době se vydal zloděje stíhat policista ze stanice v novém voze. Nevěděl však, kdy bylo auto odcizeno, ani kterým směrem se zloděj vydal. Rozhodněte, zda existuje strategie policisty taková, že vždy zloděje dostihne.

(5 BODŮ)

4. Čtvercová deska $n \times n$ je rozdělena pomocí $n-1$ horizontálních přímek a $n-1$ vertikálních přímek na n^2 pravoúhelníkových polí. Jednotlivá pole jsou obarvena podobně jako pole klasické šachovnice černou a bílou barvou. Je známo, že na jedné z úhlopříček této čtvercové desky jsou všechna její pole černé barvy a navíc jsou čtvercová. Dokažte, že součet obsahů všech polí černé barvy není menší než součet obsahů všech polí bílé barvy.

(5 BODŮ)

5. 55 boxerů se zúčastnilo turnaje, v němž poražený ze vzájemného souboje vypadává z dalších bojů. Jednotlivá utkání následovala po sobě. Přitom víme, že v každém utkání se počet předchozích vítězství obou soupeřů nelišil více než o 1. Určete, jaký je největší možný počet utkání, které během turnaje mohl absolvovat jeho vítěz.

(5 BODŮ)

32. TURNAJ MĚST – PODZIMNÍ ČÁST

(Kategorie JUNIOR – přípravné úlohy)

1. V pythagorejské tabulce násobení je vyznačen pravoúhlý rámeček šířky jednoho pole, každá jeho strana obsahuje lichý počet polí. Pole rámečku jsou střídavě (šachovnicově) obarvena černou a bílou barvou. Dokažte, že součet čísel v černých polích je roven součtu čísel v polích bílých.

(Pythagorejská tabulka násobení je tabulka, kde v poli na m-tém řádku a n-tém sloupci je zapsáno číslo mn.)

(4 BODY)

2. Uvažujme rovnoramenný lichoběžník, jemuž lze vepsat kružnici. Dokažte, že osa jeho tupého úhlu dělí tento lichoběžník na dvě části stejného obsahu.

(4 BODY)

3. Na šachovnici 8×8 je položena krychle tak, že její dolní stěna se shoduje s některým polem šachovnice. Krychle se překlápěním podle hran přemisťuje po šachovnici tak, že postupně leží na každém jejím poli (na některých polích může být i vícekrát). Rozhodněte, zda může existovat stěna této krychle, která by jako její dolní stěna ani jednou neležela na šachovnici.

(4 BODY)

4. V jedné škole se více než 90 % žáků domluví současně anglicky a německy, více než 90 % žáků se domluví současně anglicky a francouzsky. Dokažte, že mezi žáky, kteří se domluví současně německy a francouzsky je více než 90 % těch, kteří se domluví také anglicky.

(4 BODY)

5. Koncové body N tětiv dělí kružnici na $2N$ oblouků jednotkové délky. Každá tětiva přitom dělí kružnici na dva oblouky, jejichž délky jsou vyjádřeny sudými čísly. Dokažte, že číslo N je sudé.

(4 BODY)