32. TURNAJ MĚST – JARNÍ ČÁST
(Kategorie SENIOR – soutěžní úlohy)

1. Baron Prášil má 50 závaží, jejichž hmotnosti jsou vyjádřeny navzájem různými přirozenými čísly ne většími než 100. Celková hmotnost těchto závaží je udána sudým číslem. Baron Prášil tvrdí, že není možno rozdělit všechna tato závaží do dvou hromádek se stejnou hmotností. Může mít pravdu?

(4 BODY)

2. Kvádr je umístěn v kartézské souřadnicové soustavě tak, že všechny jeho vrcholy mají celočíselné souřadnice. Dokažte, že jeho hrany jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami.

(6 BODŮ)

3. Z přímého trojbokého hranolu jsou odťaty dvě části dvěma rovinami, jež nemají žádný společný bod uvnitř v tomto hranolu a nemají ani společný bod s jeho základnami.

a) Rozhodněte, zda oba řezy tohoto hranolu mohou tvořit podobné, avšak neshodné trojúhelníky. (3 BODY)

b) Rozhodněte, zda jedním řezem může být rovnostranný trojúhelník o straně 1 a druhým řezem rovnostranný trojúhelník o straně 2. (4 BODY)

4. Je dáno N modrých a N červených tyčí, kde součet délek všech modrých tyčí je roven součtu délek všech červených tyčí. Víme, že z modrých tyčí lze složit N-úhelník a z červených tyčí rovněž. Rozhodněte, zda je možno vždy vybrat po jedné tyči (modrou a červenou) a přebarvit je (modrou na červenou a červenou na modrou) tak, že opět lze složit z modrých tyčí N-úhelník a také z červených tyčí rovněž. Úlohu řešte

a) pro $N = 3$, (4 BODY)

b) pro libovolné přirozené číslo větší než 3. (4 BODY)

5. Ramena AB a CD lichoběžníku $ABCD$ jsou po řadě tětivami kružnic k_1 a k_2, které mají vnější dotyk. Oběma kružnicovým obloukům obsahujícím dotykový bod obou kružnic odpovídají v příslušných kružnicích středové úhly velikostí po řadě α, β. Nechť kružnice k_3 a k_4 mají po řadě tětivy AB a CD. Jejich kružnicové oblouky ležící v těchže polorovinách vyťatých přímkami AB a CD jako dotykový bod kružnic k_1 a k_2 odpovídají po řadě středovým úhlům β, α. Dokažte, že kružnice k_3 a k_4 mají také vnější dotyk.

(8 BODŮ)

6. V každém poli čtvercové tabulky je napsáno reálné reálné číslo tak, že součet dvou největších čísel v každém řádku tabulky je roven a a součet dvou největších čísel v každém sloupci tabulky je roven b. Dokažte, že $a = b$.

(8 BODŮ)

7. Dvě firmy střídavě přijímají programátory, mezi nimiž je 11 špičkových. Každá firma si vybere prvního programátora libovolně a každý další vybraný musí být známým některého dříve vybraného programátora firmy. Jestliže některá z firem nemůže vyhovět těmto podmínkám, nepřijme dalšího programátora a přitom druhá firma může pokračovat v příjmu programátorů. Seznam programátorů a jejich vzájemná známost jsou předem k dispozici, včetně informace o tom, kteří z nich jsou špičkoví. Rozhodněte, zda vzájemné známosti programátorů mohou být takové, že firma, která začíná přijímat programátory jako druhá v pořadí, může získat 10 špičkových programátorů bez ohledu na volby firmy, která přijímala prvního programátora.

(11 BODŮ)

32. TURNAJ MĚST – JARNÍ ČÁST

(Kategorie JUNIOR – soutěžní úlohy)

1. Rozhodněte, zda existuje šestiúhelník, který je možno jednou přímkou rozdělit na čtyři shodné trojúhelníky.

(4 BODY)

2. Počátkem souřadnicové soustavy prochází 180 přímek (včetně souřadnicových os), které dělí celou rovinu na úhly velikosti 1°. Určete součet všech x-ových souřadnic průsečíků těchto přímek s přímkou $y = 100 - x$.

(4 BODY)

3. Baron Prášil má 50 závaží, jejichž hmotnosti jsou vyjádřeny navzájem různými přirozenými čísly ne většími než 100. Celková hmotnost těchto závaží je udána sudým číslem. Baron Prášil tvrdí, že není možno rozdělit všechna tato závaží do dvou hromádek se stejnou hmotností. Může mít pravdu?

(5 BODŮ)

4. Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo N existují dvě dvojice přirozených čísel takové, že obě dvojice čísel mají stejný součet a současně podíl součinů čísel v obou uvažovaných dvojicích je roven N.

(6 BODŮ)

5. Nechť AA_1 a BB_1 jsou výšky ostroúhlého trojúhelníku ABC. Z bodu A_1 vedeme dvě kolmice ke stranám AC a AB, z bodu B_1 dvě kolmice ke stranám BC a BA. Dokažte, že paty těchto čtyř kolmic tvoří vrcholy rovnoramenného lichoběžníku.

(7 BODŮ)

6. Dva mravenci prošli po uzavřených cestách na desce 7×7. Každý mravenec se pohyboval pouze po stranách 49 čtvercových polí této desky a přitom prošel právě jednou každým z jejích 64 vrcholů. Najděte nejmenší počet stran, po nichž se mohli oba mravenci pohybovat společně.

(10 BODŮ)

7. V každém poli čtvercové tabulky je napsáno reálné číslo tak, že součet dvou největších čísel v každém řádku tabulky je roven a a součet dvou největších čísel v každém sloupci tabulky je roven b. Dokažte, že $a = b$.

(10 BODŮ)