IDENTIFIKAČNÍ ČÍSLO:

Př. č.	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ	Body
Body										

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA Z MATEMATIKY ČERVEN 2007

VARIANTA A

1) V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$3^{2x+1} + 2^{2x+1} - 5 \cdot 6^x = 0.$$

2) Určete druh kuželosečky K, její střed (vrchol) a velikost poloos (poloměr, parametr), jestliže

$$K : x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0.$$

3) Určete vzájemnou polohu přímky p a roviny ρ:

$$\begin{aligned} p: &\quad x = 1 + t,\ y = 2 - t,\ z = t, \\ \rho: &\quad 3x + 2y - 4z + 5 = 0. \end{aligned}$$

Protínají-li se, určete jejich průsečík.

4) Určete počet všech pěticiferných přirozených čísel, jež lze sestavit z čísel 5 a 7, má-li v každém z nich být číslice 5 právě třikrát.

5) Určete definiční obor, obor hodnot a načrtněte graf funkce

$$f(x) = \cos(2x + \pi) + 1.$$

6) Matematickou indukcí dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí

$$1 + 2 + 3 + + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

7) V oboru reálných čísel vyřešte nerovnici

$$|x + 3| - |x - 2| > 0.$$

8) Na číselné ose vyznačíme třetí mocniny všech přirozených čísel, tj. čísla $1^3, 2^3$, $3^3, 4^3, \ldots$. Kolik z nich leží mezi čísly 2^{21} a 4^{12}?

IDENTIFIKAČNÍ ČÍSLO:

Př. č.	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ	Body
Body										

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA Z MATEMATIKY ČERVEN 2007

VARIANTA B

1) V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$(x+5)(2x+2)+(3x+1)(x+2)=5x^2+12.$$

2) Určete druh kuželosečky K, její střed (vrchol) a velikost poloos (poloměr, parametr), jestliže

$$K: 4x^2-y^2+8x+2y-1=0.$$

3) Napište obecnou rovnici přímky v prostoru, která prochází bodem $A=[1,0,-2]$ a je rovnoběžná s přímkou p vyjádřenou parametricky

$$\begin{aligned} x &= 2-t, \\ y &= -1+2t, \\ z &= -3t. \end{aligned}$$

4) V sérii 12 výrobků jsou právě 3 vadné. Kolika způsoby z nich lze vybrat 6 výrobků, z nichž právě 2 jsou vadné?

5) Určete definiční obor, obor hodnot a načrtněte graf funkce

$$f(x)=\ln(x+1).$$

6) Matematickou indukcí dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí

$$1+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

7) V oboru reálných čísel vyřešte nerovnici

$$\frac{|x+1|}{x-2}>0.$$

8) Rozměry kvádru tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti, jejichž součet je 24 cm. Vypočtěte povrch kvádru, jestliže jeho objem je 312 cm^3.

IDENTIFIKAČNÍ ČÍSLO:

Př. č.	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ	Body
Body										

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA Z MATEMATIKY ČERVEN 2007

VARIANTA C

1) V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$(\log_3 x)^2 - 3\log_3 x - 10 = 0.$$

2) Určete druh kuželosečky K, její střed (vrchol) a velikost poloos (poloměr, parametr), jestliže

$$K : 9x^2 + 25y^2 - 126x + 300y + 1116 = 0.$$

3) Určete vzájemnou polohu přímky p a roviny ρ:

$$\begin{aligned} p: &\quad x = 2 - t,\ y = 2 + 2t,\ z = 3 + 2t,\\ \rho: &\quad 2x - y + 2z - 8 = 0. \end{aligned}$$

Protínají-li se, určete jejich průsečík.

4) Určete počet způsobů, jimiž lze přemístit písmena slova PRAHA.

5) Určete definiční obor, obor hodnot a načrtněte graf funkce

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}.$$

6) Matematickou indukcí dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

7) V oboru reálných čísel vyřešte nerovnici

$$x^2 + x + 1 \geq 6x - 5.$$

8) Mezi čísla $a_1 = 3$ a $a_n = -9$ vložte tolik členů aritmetické posloupnosti, aby jejich součet byl $s_n = -33$. Určete číslo n a diferenci d.

IDENTIFIKAČNÍ ČÍSLO:

Př. č.	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ	Body
Body										

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA Z MATEMATIKY ČERVEN 2007

VARIANTA D

1) V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$\tan(-x + \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}.$$

2) Určete druh kuželosečky K, její střed (vrchol) a velikost poloos (poloměr, parametr), jestliže

$$K : 4x^2 + 9y^2 + 8x - 54y + 49 = 0.$$

3) Napište parametrické rovnice průsečnice rovin daných rovnicemi

$$x + 2y + 3z - 5 = 0,$$
$$2x - y + 5z - 8 = 0.$$

4) Určete počet kvádrů, jejichž velikosti hran jsou přirozená čísla menší než 11.

5) Určete definiční obor, obor hodnot a načrtněte graf funkce

$$f(x) = 2^{x+1}.$$

6) Matematickou indukcí dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí

$$\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \cdots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}.$$

7) V oboru reálných čísel vyřešte nerovnici

$$\frac{x-3}{x-2} > 2.$$

8) Mezi kořeny kvadratické rovnice $2x^2 + 9x + 4 = 0$ vložte dvě čísla tak, aby spolu s těmito kořeny vznikly čtyři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti. Napište tato vložená čísla.

IDENTIFIKAČNÍ ČÍSLO:

Př. č.	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ	Body
Body										

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA Z MATEMATIKY ČERVEN 2007

VARIANTA E

1) V oboru reálných čísel řešte rovnici
$$\frac{2x}{x+3} - \frac{2x}{x-3} = \frac{72}{4x^2-36}.$$

2) Určete druh kuželosečky K, její střed (vrchol) a velikost poloos (poloměr, parametr), jestliže
$$K: y^2 - 4y - 4x = 0.$$

3) Určete vzájemnou polohu přímek p a q:
$$\begin{array}{ll} p: & x = 1-3t,\ y = 2t,\ z = 2+t, \\ q: & x = -1+2u,\ y = 1-u,\ z = 3u. \end{array}$$
Protínají-li se, určete jejich průsečík.

4) Kolik přirozených dvouciferných čísel větších než 14 lze vytvořit z číslic $0, 1, 2, 3, 5$, jestliže se žádná číslice neopakuje?

5) Určete definiční obor, obor hodnot a načrtněte graf funkce
$$f(x) = \sqrt{x+1}.$$

6) Matematickou indukcí dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

7) V oboru reálných čísel vyřešte nerovnici
$$\frac{x^2-2x+1}{x+1} \geq 0.$$

8) Přičteme-li k číslům $x = -1$, $y = 11$ a $z = 95$ stejné číslo, dostaneme první tři členy geometrické posloupnosti. Určete kvocient této posloupnosti.

IDENTIFIKAČNÍ ČÍSLO:

Př. č.	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ	Body
Body										

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA Z MATEMATIKY ČERVEN 2007

VARIANTA F

1) V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0.$$

2) Určete druh kuželosečky K, její střed (vrchol) a velikost poloos (poloměr, parametr), jestliže

$$K : 4x^2 - y^2 + 2y - 17 = 0.$$

3) Určete vzájemnou polohu přímky p a roviny ρ:

$$\begin{array}{ll} p: & x = 2 + t,\ y = 3 + 5t,\ z = 2 + 3t, \\ \rho: & x - 2y + 3z - 4 = 0. \end{array}$$

Protínají-li se, určete jejich průsečík.

4) Kolik pětimístních telefonních čísel lze sestavit tak, aby se v žádném čísle žádná číslice nevyskytovala dvakrát? (Telefonní čísla ovšem mohou začínat nulou.)

5) Určete definiční obor, obor hodnot a načrtněte graf funkce

$$f(x) = -x^2 + x + 1.$$

6) Matematickou indukcí dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí

$$\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right).$$

7) V oboru reálných čísel vyřešte nerovnici

$$|x-3| \geq |x-2| + |x+1|.$$

8) Délky hran kvádru tvoří tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti s kvocientem větším než 1. Jaké jsou jejich délky, je-li jejich součet 14 cm a nejdelší hrana je dlouhá 8 cm?

IDENTIFIKAČNÍ ČÍSLO:

Př. č.	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ	Body
Body										

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA Z MATEMATIKY ČERVEN 2007

VARIANTA G

1) V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$1-\sqrt{2x+2}=\sqrt{2x-5}.$$

2) Určete druh kuželosečky K, její střed (vrchol) a velikost poloos (poloměr, parametr), jestliže

$$K: x^2-y^2-4x-6y-14=0.$$

3) Určete c v rovnici přímky $2x+y+c=0$ tak, aby se tato přímka a přímky o rovnicích $3x+4y+1=0$ a $x-y-2=0$ protínaly v jednom bodě.

4) Ve věcné loterii je 5 výher. Losů je 12. Kolika způsoby je možno zakoupit 5 losů, aby právě dva vyhrály?

5) Určete definiční obor, obor hodnot a načrtněte graf funkce

$$f(x)=(x+1)|x+1|+2.$$

6) Matematickou indukcí dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí

$$1+2^2+3^2+\dots n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

7) V oboru reálných čísel vyřešte nerovnici

$$\frac{x+5}{x-3}\leq 0.$$

8) Součet čtyř po sobě jdoucích členů geometrické posloupnosti je 80. Určete je, jestliže víte, že poslední člen je devětkrát větší než druhý člen. Napište všechna řešení.

IDENTIFIKAČNÍ ČÍSLO:

Př. č.	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ	Body
Body										

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA Z MATEMATIKY ČERVEN 2007

VARIANTA H

1) V oboru reálných čísel řešte rovnici
$$|2x-1|+|x-2|=1.$$

2) Určete druh kuželosečky K, její střed (vrchol) a velikost poloos (poloměr, parametr), jestliže
$$K: y^2+6x-18=0.$$

3) Spočtěte vzdálenost bodu $A=[4,3]$ od přímky p dané parametrickými rovnicemi $x=1-t$, $y=2+t$, $t\in\mathbb{R}$.

4) Kufřík má heslový zámek, který se otevře, když na každém z pěti kotoučů nastavíme správnou číslici. Těchto číslic je na každém kotouči 9. Určete maximální počet pokusů, které je nutno provést, chceme–li kufřík otevřít a zapomněli jsme heslo.

5) Určete definiční obor, obor hodnot a načrtněte graf funkce
$$f(x)=|x+1|-|x-2|.$$

6) Matematickou indukcí dokažte, že pro každé přirozené číslo $n>1$ platí
$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\ldots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}.$$

7) V oboru reálných čísel vyřešte nerovnici
$$\frac{x+2}{x-1}\leq 2x.$$

8) Pro rostoucí aritmetickou posloupnost (a_n) platí
$$a_1\cdot a_4=-\frac{1}{2}\qquad \frac{a_2}{a_5}=0.$$
Vypočtěte a_1 a diferenci d.

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA Z MATEMATIKY ČERVEN 2007

VARIANTA A - ŘEŠENÍ

1) Substituce: $\left(\frac{3}{2}\right)^x = y$
Řešení rovnice: $K = \{0, -1\}$.

2) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$
Kružnice se středem v bodě $[2, 1]$ a poloměrem 5.

3) Přímka protíná rovinu v bodě $[5, -2, 4]$.

4) $P'(3, 2) = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{120}{6 \cdot 2} = 10$.

5) $D(f) = \mathbb{R}, H(f) = [0, 2]$.
Základem je graf funkce cosinus.
Perioda se zmenší z 2π na π, graf se posune o $\frac{\pi}{2}$ doleva a o jedničku nahoru.

6) Ukážeme, že rovnost paltí pro $n = 1$.
Použijeme indukční předpoklad pro $n = k$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2},$$

dokazujeme rovnost pro $n = k + 1$. Dostaneme

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

7) Řešíme zvlášť na intervalech $(-\infty, -3), [-3, 2], (2, \infty)$.
Rovnost platí pro $x \in (-\frac{1}{2}, \infty)$.

8) $2^{21} = (2^7)^3 = 128^3$,
$4^{12} = (4^4)^3 = 256^3$.
Mezi nimi leží $256 - 128 - 1 = 127$ čísel.

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA Z MATEMATIKY ČERVEN 2007

VARIANTA B - ŘEŠENÍ

1) Řešení rovnice: $K = \{0\}$.

2) $(x+1)^2 - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$
Hyperbola se středem v bodě $[-1, 1]$, $a = 1$, $b = 2$.

3) Parametrické vyjádření: $x = 1 - t,\ y = 2t,\ z = -2 - 3t$.
Obecná rovnice: $x - y - z - 3 = 0$.

4) $K(2,3) \cdot K(4,9) = \binom{3}{2} \cdot \binom{9}{4} = 3 \cdot 126 = 378$.

5) $D(f) = (-1, \infty), H(f) = \mathbb{R}$.
Graf funkce $\ln x$ posunutý o jedničku doleva.

6) Ukážeme, že rovnost paltí pro $n = 1$.
Použijeme indukční předpoklad pro $n = k$

$$1 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2,$$

dokazujeme rovnost pro $n = k + 1$. Dostaneme

$$\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2.$$

7) Čitatel je vždy kladný. Řešíme $x - 2 > 0$. Platí pro $x \in (2, \infty)$.

8) Délky stran kvádru jsou $a - d, a, a + d$, přičemž platí

$$a - d + a + a + d = 24,$$
$$(a - d) \cdot a \cdot (a + d) = 312.$$

Řešením je $a_1 = 3, a_2 = 8$ a $a_3 = 13$ (nebo $a_1 = 13, a_2 = 8$ a $a_3 = 3$).
Povrch kvádru je

$$S = 2 \cdot (3 \cdot 8 + 8 \cdot 11 + 3 \cdot 11) = 334 \text{ cm}^2.$$

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA Z MATEMATIKY ČERVEN 2007

VARIANTA C - ŘEŠENÍ

1) Substituce: $\log_3 x = y$
Řešení rovnice: $K = \left\{243, \frac{1}{9}\right\}$.

2) $\frac{(x-7)^2}{25} + \frac{(y+6)^2}{9} = 1$
Elipsa se středem v bobě $[7, -6]$, $a = 5$, $b = 3$.

3) Přímka p leží v rovině ρ.

4) $P'(2, 1, 1, 1) = \frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = 60$.

5) Upravíme na

$$f(x) = 1 + \frac{2}{x-1}.$$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, H(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
Grafem je graf funkce $\frac{1}{x}$ (hyperbola v 1. a 3. kvadrantu), jehož všechny hodnoty se zdvojnásobí a celý se pak posune o jedničku doprava a o jedničku nahoru.

6) Ukážeme, že rovnost paltí pro $n = 1$.
Použijeme indukční předpoklad pro $n = k$

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{k \cdot (k+1) \cdot (k+2)} = \frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)},$$

dokazujeme rovnost pro $n = k + 1$. Dostaneme

$$\frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1) \cdot (k+2) \cdot (k+3)} = \frac{(k+1)(k+4)}{4(k+2)(k+3)}.$$

7) Upravíme na $(x - 2)(x - 3) \geq 0$.
$(x - 2 \geq 0 \wedge x - 3 \geq 0) \vee (x - 2 \leq 0 \wedge x - 3 \leq 0)$
Platí pro $x \in (-\infty, 2] \cup [3, \infty)$.

8) Pro aritmetickou posloupnost platí $a_n = a_1 + (n-1)d$ a $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$.
Dostaneme soustavu rovnic

$$-9 = 3 + (n-1)d,$$
$$-33 = \frac{n}{2}(3 - 9),$$

jejímž řešením je $d = -\frac{6}{5}$ a $n = 11$. Vložených členů je 9.

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA Z MATEMATIKY ČERVEN 2007

VARIANTA D - ŘEŠENÍ

1) Substituce: $-x + \frac{\pi}{6} = y$
Řešení rovnice: $K = \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

2) $\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$
Elipsa se středem v bobě $[-1, 3]$, $a = 3$, $b = 2$.

3) $x = -1 + 13t, y = t, z = 2 - 5t, \quad t \in \mathbb{R}$.

4) $K'(3, 10) = \binom{12}{3} = \frac{12!}{3! \cdot 9!} = 220$.

5) $f(x) = 2 \cdot 2^x$.
$D(f) = \mathbb{R}, H(f) = (0, \infty)$.
Graf funkce 2^x, jehož všechny hodnoty se dvakrát zvětší.

6) Ukážeme, že rovnost paltí pro $n = 1$.
Použijeme indukční předpoklad pro $n = k$

$$\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \ldots + \frac{1}{(4k-3) \cdot (4k+1)} = \frac{k}{4k+1},$$

dokazujeme rovnost pro $n = k + 1$. Dostaneme

$$\frac{k}{4k+1} + \frac{1}{(4(k+1)-3) \cdot (4(k+1)+1)} = \frac{k+1}{4(k+1)+1}.$$

7) Upravíme na

$$\frac{1-x}{x-2} > 0$$

$(1 - x > 0 \wedge x - 2 > 0) \vee (1 - x < 0 \wedge x - 2 < 0)$.
Platí pro $x \in (1, 2)$.

8) Kořeny této rovnice jsou $-\frac{1}{2}$ a -4. Označme
$a_1 = -\frac{1}{2}$,
$a_2 = a_1 \cdot q = -\frac{1}{2} \cdot q$,
$a_3 = a_2 \cdot q = -\frac{1}{2} \cdot q^2$,
$a_4 = a_3 \cdot q = -\frac{1}{2} \cdot q^3 = -4$.
Tedy $q = 2$ a vložená čísla jsou $a_2 = -1$, $a_3 = -2$.

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA Z MATEMATIKY ČERVEN 2007

VARIANTA E - ŘEŠENÍ

1) Řešení rovnice: $K = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$.

2) $(y-2)^2 = 4(x+1)$
Parabola s vrcholem v bodě $[-1, 2]$, parametrem $p = 2$ (je otevřená doprava).

3) Přímky p, q jsou mimoběžné.

4) $3 \cdot 4 + 1 = 13$.

5) $D(f) = [-1, \infty), H(f) = [0, \infty)$
Grafem je graf funkce $\sqrt{x}$ posunutý o jedničku doleva.

6) Ukážeme, že rovnost paltí pro $n = 1$.
Použijeme indukční předpoklad pro $n = k$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{1}{2^k},$$

dokazujeme rovnost pro $n = k + 1$. Dostaneme

$$2 - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = 2 - \frac{1}{2^{k+1}}.$$

7) Upravíme na

$$\frac{(x-1)^2}{x+1} \geq 0.$$

Čitatel je vždy kladný. Řešíme $x + 1 > 0$. Platí pro $x \in (-1, \infty)$.

8) Neznámé číslo označme a. Potom $a_1 = -1 + a$, $a_2 = 11 + a$, $a_3 = 95 + a$.
K určení kvocientu nám stačí vypočítat rovnici

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}.$$

Tedy

$$\frac{11 + a}{-1 + a} = \frac{95 + a}{11 + a}$$

Řešením je $a = 3$. Celkově dostáváme $q = 7$.

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA Z MATEMATIKY ČERVEN 2007

VARIANTA F - ŘEŠENÍ

1) Substituce: $x^2 = y$
Řešení rovnice: $K = \{1, -1, 3, -3\}$

2) $\frac{x^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{16} = 1$
Hyperbola se středem v bodě $[0, 1]$, $a = 2$, $b = 4$.

3) Přímka p je rovnoběžná s rovinou ρ.

4) $V(5, 10) = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240.$

5) $D(f) = \mathbb{R}, H(f) = (-\infty, \frac{5}{4}]$.
Grafem je záporně orientovaná parabola se středem v bodě $[\frac{1}{2}, \frac{5}{4}]$.

6) Ukážeme, že rovnost paltí pro $n = 1$.
Použijeme indukční předpoklad pro $n = k$

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(3k-2) \cdot (3k+1)} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3k+1}\right),$$

dokazujeme rovnost pro $n = k + 1$. Dostaneme

$$\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3k+1}\right) + \frac{1}{(3(k+1)-2) \cdot (3(k+1)+1)} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3(k+1)+1}\right).$$

7) Řešíme zvlášť na intervalech $(-\infty, -1), [-1, 2), [2, 3), [3, \infty)$.
Platí pro $x \in [-2, 0]$.

8) Platí

$$a + aq + aq^2 = 14,$$
$$aq^2 = 8.$$

Řešením jsou čísla $q_1 = 2$ a $q_2 = -\frac{2}{3}$.
Protože kvocient je větší než 1, musí být $q = 2$.
Tedy délky hran jsou $2, 4$ a 8 cm.

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA Z MATEMATIKY ČERVEN 2007

VARIANTA G - ŘEŠENÍ

1) Nutná zkouška: $x = 7$
$L = 1 - \sqrt{14+2} = -6$
$P = \sqrt{14-5} = 3$ $\Longrightarrow$ rovnice nemá řešení.

2) $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+3)^2}{9} = 1$
Hyperbola se středem v bobě $[2, -3]$, $a = 3$, $b = 3$.

3) $c = -1$.

4) $K(2,5) \cdot K(3,9) = \binom{5}{2} \cdot \binom{9}{3} = 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 7 = 1680.$

5) $D(f) = \mathbb{R}, H(f) = \mathbb{R}$
Grafem jsou části dvou parabol se středem v bodě $[-1, 3]$.
Na intervalu $(-\infty, -1)$ je záporně orientovaná a na intervalu $[-1, \infty)$ kladně.

6) Použijeme indukční předpoklad pro $n = k$

$$1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

dokazujeme rovnost pro $n = k+1$. Dostaneme

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}.$$

7) $(x+5 \geq 0 \wedge x-3 < 0) \vee (x+5 \leq 0 \wedge x-3 < 0)$
Platí pro $x \in (-\infty, 3)$.

8) Víme, že

$$a + aq + aq^2 + aq^3 = 80$$
$$9aq = aq^3.$$

Z druhé rovnice ihned plyne, že $q_1 = 3$ a $q_2 = -3$.
Pro $q_1 = 3$ dostáváme posloupnost $2, 6, 18, 54$.
Pro $q = -3$ dostaneme $-4, 12, -36, 108$.

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA Z MATEMATIKY ČERVEN 2007

VARIANTA H - ŘEŠENÍ

1) Rovnice nemá řešení.

2) $y^2 = -6(x-3)$
Parabola s vrcholem v bodě $[3,0]$, parametrem $p=3$ (je otevřená doleva).

3) Obecná rovnice přímky p: $x+y-3=0$
Vzdálenost: $v(A,p) = \frac{4+3-3}{\sqrt{1^2+1^2}} = 2\sqrt{2}$.

4) $V'(5,9) = 9^5 = 59059$.

5) $D(f)=\mathbb{R}, H(f)=\mathbb{R}$.
Grafem je funkce
$y=-3$ na intervalu $(-\infty,-1)$,
$y=2x-1$ na $[-1,2]$,
$y=3)$ na $(2,\infty)$.

6) Ukážeme, že rovnost paltí pro $n=2$.
Použijeme indukční předpoklad pro $n=k$

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}\dots+\frac{k}{2^k} = 2-\frac{k+2}{2^k},$$

dokazujeme rovnost pro $n=k+1$. Dostaneme

$$2-\frac{k+2}{2^k}+\frac{k+1}{2^{k+1}} = 2-\frac{k+3}{2^{k+1}}.$$

7) Upravíme na

$$\frac{4-x}{x+1} \le 0$$

$(4-x\le 0 \wedge x-1>0) \vee (4-x\ge 0 \wedge x-1<0)$.
Platí pro $x\in(-\infty,1)\cup[4,\infty)$.

8) Z druhé rovnice dostaneme $a_2=0$.
Protože $a_2=a_1+d=0$, pak $a_1=-d$.
První rovnici upravíme na
$a_1\cdot(a_1+3d) = -\frac{1}{2}$.
$d^2-3d^2 = -\frac{1}{2}$.
Protože se jedná o rostoucí posloupnost, musí být $d=\frac{1}{2}$ a tedy $a_1=-\frac{1}{2}$.

IDENTIFIKAČNÍ ČÍSLO:

Př. č.	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ	Body
Body										

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA Z MATEMATIKY ZÁŘÍ 2007

VARIANTA I

1) V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$\sqrt{7-\sqrt{x-3}}=2.$$

2) Určete druh kuželosečky K, její střed (vrchol) a velikost poloos (poloměr, parametr), jestliže

$$K: 4x^2+4y^2-24x-32y+51=0.$$

3) Určete vzájemnou polohu rovin ρ a σ:

$$\begin{aligned}\sigma: &\quad x-4y+8z-11=0\\ \rho: &\quad x-4y+8z+7=0.\end{aligned}$$

Protínají-li se, určete jejich průsečík.

4) Kolika způsoby lze rozdělit 7 zaměstnanců do 3 různých místností tak, aby v první místnosti byli 4 pracovníci, ve druhé byl jeden pracovník a ve třetí byli 2 pracovníci?

5) Určete definiční obor, obor hodnot a načrtněte graf funkce

$$f(x)=x^2-6x+5.$$

6) Matematickou indukcí dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\ldots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}.$$

7) V oboru reálných čísel vyřešte nerovnici

$$2x-|3x+6|\leq\frac{8+2x}{3}.$$

8) Délky hran kvádru tvoří tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti s kvocientem větším než 1. Jaké jsou jejich délky, je-li jejich součet 14 cm a nejdelší hrana je dlouhá 8 cm.

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA Z MATEMATIKY ZÁŘÍ 2007

VARIANTA I - ŘEŠENÍ

1) Řešení rovnice: $K = \{12\}$.

2) $(x-3)^2 + (y-4)^2 = \frac{49}{4}$
Kružnice se středem v bodě $[3, 4]$ a poloměrem $\frac{7}{2}$.

3) Roviny jsou rovnoběžné, různé.

4) $P'(4, 1, 2) = \frac{7!}{4! \cdot 2! \cdot 1!} = 105$.

5) $D(f) = \mathbb{R}, H(f) = [-4, \infty]$. Grafem funkce je parabola s vrcholem v bodě $[-4, 3]$.

6) Pro $n = 1$: $L = \frac{1}{2}$, $\qquad P = 2 - \frac{1+2}{2^1} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$.

Předpokládejme, že platí pro n, dokážeme pro $n + 1$:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \ldots + \frac{n}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} =$$
$$= 2 + \frac{-2(n+2) + n + 1}{2^{n+1}} = 2 + \frac{-n-3}{2^{n+1}} = 2 - \frac{(n+1)+2}{2^{n+1}}.$$

7) Řešíme zvlášť na intervalech $(-\infty, -2), [-2, \infty)$.
Nerovnost platí pro každé $x \in \mathbb{R}$.

8) Ze zadání dostáváme rovnice

$$a + aq + aq^2 = 14,$$
$$aq^2 = 8.$$

Vyjádřím-li si z druhé rovnice a a dosadím jej do první rovnice, dostanu

$$\frac{8}{q^2}(1 + q + q^2) = 14.$$

Řešením této rovnice jsou čísla 2 a $-\frac{2}{3}$. Protože kvocient je větší než 1, $q = 2$. Tedy délky hran jsou $2, 4$ a 8 cm.