Zkompletování tkáně řádu *n* a deficitu 1 nebo 2

V. Havel, V. Sedlář

Abstrakt: Je podán návod na připojení jedné nebo dvou osnov přímek k dané tkáni o deficitu 1 nebo 2 tak, aby vznikla afinní rovina.
Klíčová slova: řád, stupeň a deficit tkáně, konečná afinní rovina, zkompletování tkáně.

§1. *Tkáň řádu* $n \geq 2$ a *stupně* $k \geq 3$ definujeme jako $(k+1)$–tici $(\mathcal{P}, \mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_k)$ neprázdných množin, kde prvky množiny $\mathcal{P}$ prohlásíme za *body*, prvky množiny $\mathcal{L}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{L}_k$ za *přímky* a množiny $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_k$ za *osnovy*, přičemž

(i) každá přímka je podmnožinou v $\mathcal{P}$,

(ii) přímky každé osnovy tvoří rozklad množiny $\mathcal{P}$,

(iii) každé dvě přímky z různých osnov mají jediný společný bod (jejich *průsečík*),

(iv) existuje přímka obsahující právě *n* bodů.

Lze ukázat, že pak každá přímka (a každá osnova) obsahuje právě *n* bodů (právě *n* přímek) a $k \leq n+1$; číslo $d = n + 1 - k$ se nazývá *deficitem (schodkem)* tkáně. Pro $k = n + 1$ se stává tkáň *afinní rovinou* (zde s uspořádanou množinou osnov). Dvě přímky prohlásíme za *rovnoběžné* (*různoběžné*), leží-li téže osnově (v různých osnovách). Dva různé body prohlásíme za *spojitelné* (*nespojitelné*), existuje-li (neexistuje-li) přímka, která oba body obsahuje.

Řekněme, že tkáň $(\mathcal{P}, \mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_k)$, kde $k < n + 1$ (neboli $d \geq 1$), se dá *zkompletovat*, existuje-li tkáň $(\mathcal{P}, \mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_{n+1})$. Upotřebíme polynom čtvrtého stupně $f(x) = \frac{x^4}{2} + x^3 + x^2 + \frac{3x}{2}$.

R. H. Bruck dokázal v r. 1963 (viz [2], str. 422) tyto důležité věty:

(A) Platí-li pro řád *n* a deficit $d \geq 1$ dané tkáně nerovnost $n > (d-1)^2$ a je–li tato tkáň zkompletovatelná, pak (až na pořadí nových osnov) jediným způsobem.

(B) Každá tkáň o řádu *n* a deficitu $d \geq 1$ je při splnění nerovnosti $n > f(d-1)$ zkompletovatelná.

Nás zajímají pouze případy deficitů 1 a 2. Pak předešlé věty dávají následující důsledky:

(C) Každá tkáň o řádu i stupni $n \geq 2$ (s deficitem 1) je jednoznačně zkompletovatelná.

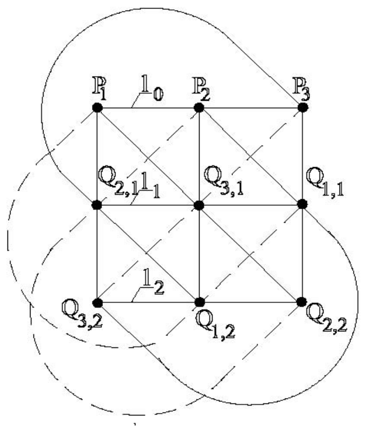
(D) Každá tkáň o řádu $n \geq 5$ a stupni $n - 1$ (s deficitem 2) je jednoznačně zkompletovatelná.

Záležitost věty (C) projednal v r. 1979 bez použití (a asi bez znalosti) Bruckových výsledků z prací [1], [2] V. D. Bělousov (viz [3]).

§2. Nechť $(\mathcal{P}, \mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n)$ je tkáň řádu $n \geq 2$ s deficitem 1. Nechť $l_0, l_1, \ldots, l_{n-1}$ jsou všechny přímky osnovy $\mathcal{L}_1$ a nechť $P_1, P_2, \ldots, P_n$ jsou všechny body přímky l_0 (uspořádání množiny l_0 i osnovy $\mathcal{L}_1$ mají jen pomocný ráz). Zvolme $i \in \{1, \ldots, n\}$ a stanovme pro každé $j \in \{1,\ldots,n-1\}$ ten jediný bod $Q_{i,j}$ přímky l_j, který je nespojitelný s bodem P_i: proložme bodem P_i všech $n-1$ přímek různých od l_0 a stanovme jejich průsečíky s přímkou l_j; těch průsečíků je právě $n-1$, takže zbývá jediný bod $Q_{i,j} \in l_j$, a ten je nespojitelný s bodem P_i. Vzhledem k tomu, že podle věty (C) je zkompletování dané tkáně možné, a to jediným způsobem, postačí nám charakterizovat novou přímku bodem P_i právě nespojitelností tohoto bodu s ostatními body nové přímky. Je tedy $\left\{\{P_i, Q_{i,1},\ldots,Q_{i,n-1}\} \middle| i \in \{1,\ldots,n\}\right\}$ osnova, doplňující danou tkáň ve tkáň stupně $n+1$.

V článku [3] ukazuje V. D. Bělousov přímým vyšetřováním, že body nových přímek jsou vzájemně nespojitelné, že nové přímky jsou po dvou disjunktní (což je již z hořejší konstrukce ihned patrné) a že každá přímka výchozí tkáně má s každou novou přímkou vždy právě jeden bod společný. To při odvolání na větu (C) ověřovat nemusíme.

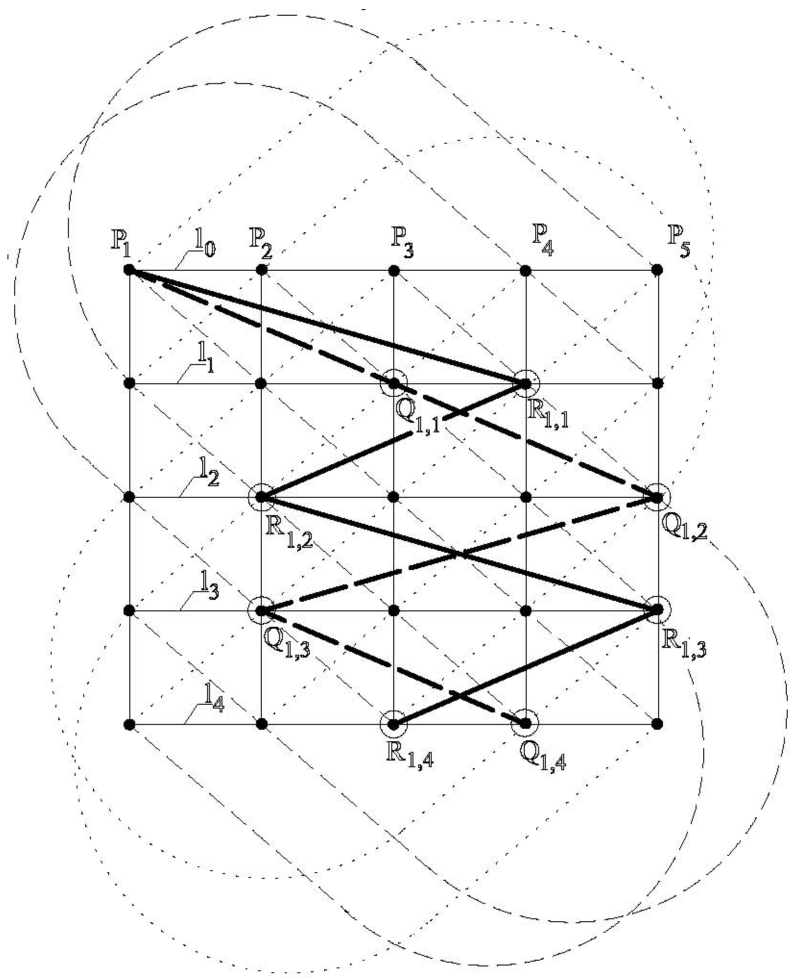
Jako malou ilustraci vyšetříme tkáň řádu i stupně 3 z obrázku 1. Nové přímky jsou zakresleny přerušovanými čarami. Výsledkem je afinní rovina řádu 3.



Obr. 1

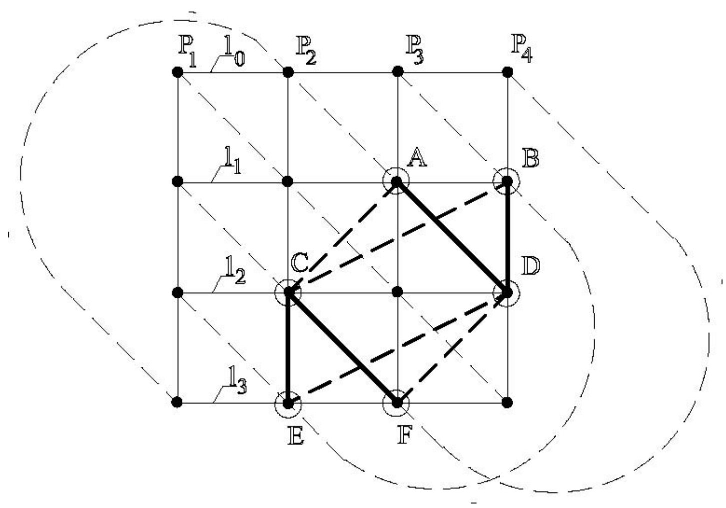
§3. Nechť nyní $(\mathcal{P}, \mathcal{L}_1,\ldots,\mathcal{L}_{n-1})$ je tkáň řádu $n \geq 5$ a stupně $n-1$. Podle věty (D) lze ji zkompletovat jednoznačně určenými dvěma novými osnovami.

Tak jako v §2 zaveďme i zde označení $P_1,\ldots,P_n$ pro body přímky $l_0 \in \mathcal{L}_1$ a $l_0,\ldots,l_{n-1}$ pro zbývající přímky osnovy $\mathcal{L}_1$. V dalším i budeme postupně volit v množině $\{1,\ldots,n-1\}$. Pak jsou pro každé $j \in \{1,\ldots,n-1\}$ na přímce l_j právě dva body $Q_{i,j}$, $R_{i,j}$ nespojitelné s bodem P_i. Vzhledem k větě (D) lze provést označení tak, že vznikne úplný bipartitní graf s částmi $\{Q_{i,1},Q_{i,2},\ldots,Q_{i,n-1}\}$, $\{R_{i,1},R_{i,2},\ldots,R_{i,n-1}\}$, v němž vrcholy incidují s touž hranou právě tehdy, když jakožto body tkáně jsou spojitelné v rámci dané tkáně. Tedy $p_i = \{P_i,Q_{i,1},\ldots,Q_{i,n-1}\}$, $q_i = \{P_i,R_{i,1},\ldots,R_{i,n-1}\}$ jsou nové přímky bodem P_i a při vhodném označení jsou $p_1,\ldots,p_n$ vzájemně disjunktní (a tvoří novou osnovu) a též $q_1,\ldots,q_n$ jsou vzájemně disjunktní (a tvoří zbývající novou osnovu). Okolnosti vzájemného protínání přímek výchozích osnov s přímkami z obou nových osnov, jakožto i protínání přímek z první nové osnovy s přímkami z druhé nové osnovy není třeba ověřovat, protože jsou zaručeny větou (D). Přímé ověření (obdobně jako v článku [3] pro deficit 1) vyhlíží jako obtížná kombinatorická záležitost, jak je patrné z odpovídajících hlubokých úvah z práce [2].



Obr. 2

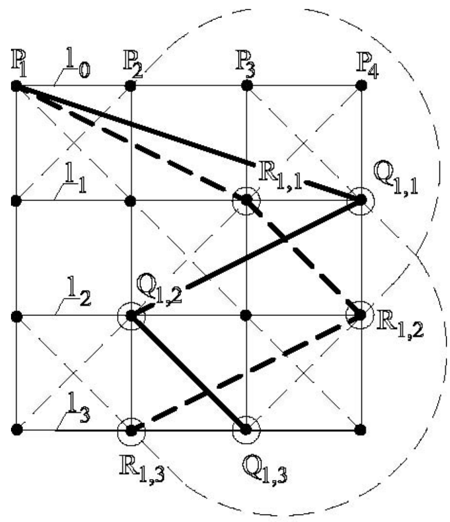
Jako ilustraci vezmeme tkáň řádu 5 a stupně 4 z průvodního obrázku 2. Přímky první osnovy jsou vodorovné, přímky druhé osnovy jsou svislé, přímky třetí osnovy jsou rovnoběžné s hlavní diagonálou (čárkované) a přímky čtvrté osnovy s vedlejší diagonálou (tečkované). Nové přímky bodem P_1 jsou vyznačeny nepřerušovaně tlustě, respektive přerušovaně tlustě.



Obr. 3

§4. Existuje tkáň řádu 4 a stupně 3, kterou zkompletovat nelze. Taková je tkáň z obrázku 3.

S bodem P_1 nespojitelné body na přímkách l_1, l_2 a l_3 jsou po řadě A,B; C,D; E,F. Vidíme, že zde nelze utvořit příslušný bipartitní graf „ spojitelnosti“, protože kupř. oba body A,B jsou spojitelné s týmž bodem D a oba body C,D s týmž bodem E.



Obr. 4

V případě tkáně na obr. 4 by to však možné bylo, výchozí tkáň řádu 4 a stupně 3 by bylo možno zkompletovat do afinní roviny nad GF(4).

Literatura:

[1] R. H. Bruck, Finite nets, I. Numerical Invariants, Canad. Journ. Math. 3 (1951), 94-107

[2] R. H. Bruck, Finite nets, II. Uniqueness and Imbedding, Pacif. Journ. Math. 13 (1963), 421-457

[3] В. Д. Белоусов, Об одном классе алгебраических сетей, Мат. Иссл. 51 (1979), 14-22

Adresy autorů: havel@feec.vutbr.cz
vladimir.sedlar@math.slu.cz