K základní větě reálné afinní rovinné geometrie

V. Havel – V. Sedlář

Abstrakt: *Je podán důkaz věty zmíněné v nadpisu bez prostředků projektivní geometrie.*

Klíčová slova: Vektorový prostor, regulární lineární transformace, afinní rovina, afinní zobrazení.

2000 MSC (podle http://www.ams.org/msc/): 51N10

§1. *Reálnou afinní rovinu* definujeme jako uspořádanou trojici $(\mathcal{P}, \mathbf{V}, \overrightarrow{\quad})$ kde $\mathcal{P}$ je neprázdná množina, $\mathbf{V}$ je dvojrozměrný vektorový prostor[1)] a $\overrightarrow{\quad}$ je zobrazení množiny $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ do množiny $\mathbf{V}$ [2)], pro něž platí tyto dva požadavky:

(i) pro každé $A \in \mathcal{P}$ a každé $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ je rovnice $\overrightarrow{AX} = \mathbf{a}$ jednoznačně řešitelná v $X \in \mathcal{P}$,

(ii) pro všechna $A,B,C \in \mathcal{P}$ platí $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (*rovnoběžníkové pravidlo*).

V dalším pod *afinní rovinou* budeme rozumět reálnou afinní rovinu. Prvky množiny $\mathcal{P}$ prohlásíme za *body*, množinu všech reálných čísel označíme $\mathbb{R}$.

Z rovnoběžníkového pravidla hned plyne, že pro každé $A,B \in \mathcal{P}$ je $\overrightarrow{BA}$ vektor opačný k vektoru $\overrightarrow{AB}$.

Vztažná soustava afinní roviny je definována jako libovolná uspořádaná trojice $(A,\mathbf{b},\mathbf{c}) \in \mathcal{P} \times \mathbf{V} \times \mathbf{V}$, kde vektory $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ jsou lineárně nezávislé. Potom každý bod $P \in \mathcal{P}$ má vzhledem k $(A,\mathbf{b},\mathbf{c})$ *souřadnice* t_1, t_2 (v tomto pořadí) určené jednoznačně z rovnosti $\overrightarrow{AP} = t_1\,\mathbf{b} + t_2\,\mathbf{c}$.

Pro každý bod P a každý nenulový vektor $\mathbf{v}$ je definována *přímka* jako množina bodů X vzniklých tak, že pro každé $t \in \mathbb{R}$ stanovíme vektor $\overrightarrow{PX} = t\,\mathbf{v}$. Bod P je přitom *opěrný bod* přímky a $\mathbf{v}$ její *směrový vektor*; uspořádaná dvojice $(P,\mathbf{v})$ je *umístění* na přímce a t je *souřadnice* bodu X při něm[3)]. Dvě přímky, určené vždy opěrným bodem a směrovým vektorem, prohlásíme za *rovnoběžné* (*různoběžné*), jsou-li jejich směrové vektory lineárně závislé (nezávislé). Rovnoběžnost je ekvivalenční relací na množině $\mathcal{L}$ všech přímek a pro její označení užijeme symbol $\parallel$. Dvě rovnoběžné přímky buďto splývají[4)] anebo jsou disjunktní. Dvě různoběžné přímky mají vždy jednobodový průnik, společný bod se nazývá *průsečík*; průsečík různoběžných přímek a, b označíme $a \sqcap b$. Jsou-li A, B různé body, pak oběma prochází právě jedna přímka (tu označíme AB), jedno umístění na této přímce je např. $(A, \overrightarrow{AB})$.

---

1) Označení vektorového prostoru a množiny všech vektorů bude společné, sčítání vektorů označíme běžným symbolem +, násobení zleva vektoru skalárem označíme tečkou, případně prázdným místem.

2) Je-li $A,B \in \mathcal{P}$, pak píšeme $\overrightarrow{\quad} : (A,B) \mapsto \overrightarrow{AB}$.

3) Vzhledem ke vztažné soustavě $(O,\mathbf{a},\mathbf{b})$

4) splývají: jakožto množiny se rovnají

Afinním zobrazením (stručně *afinitou*)[5)] afinní roviny budeme rozumět opět bijektivní zobrazení množiny $\mathcal{P}$ na sebe, při němž množina obrazů všech bodů každé přímky je přímka.

§2. Již máme vše potřebné k vyslovení **základní věty**: *Je-li* α *afinita reálné afinní roviny* $(\mathcal{P}, \mathbf{V}, \overrightarrow{\quad})$, *pak pro každé* A, B, C, D $\in \mathcal{P}$ *platí* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{A^{\alpha}B^{\alpha}} = \overrightarrow{C^{\alpha}D^{\alpha}}$ *(přenos vektorové rovnosti), takže má smysl přidružené zobrazení* $\hat{\alpha}: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, *přičemž* $\overrightarrow{AB}$ *se zobrazí do* $\overrightarrow{A^{\alpha}B^{\alpha}}$ *pro každé* A, B $\in \mathcal{P}$. *Toto přidružené zobrazení je regulární lineární transformací vektorového prostoru* **V**.

V literatuře bývá tato věta dokazována prostředky projektivní geometrie a to užitím von Staudtových projektivit (kupř. [1], str. 38-48) nebo užitím oddělování dvojic bodů harmonických čtveřic (kupř. [2], str. 202-281 spolu s Dodatkem III). Na jediném místě ([5], str. 188, resp. str. 189) se dovídáme, že v jistých rozmnožených textech na Cornell University (USA) je v dodatku uveden důkaz, který se o prostředky projektivní geometrie neopírá. Tyto texty však jsme neměli ani nemáme k dispozici a uvádíme takový důkaz vlastní.

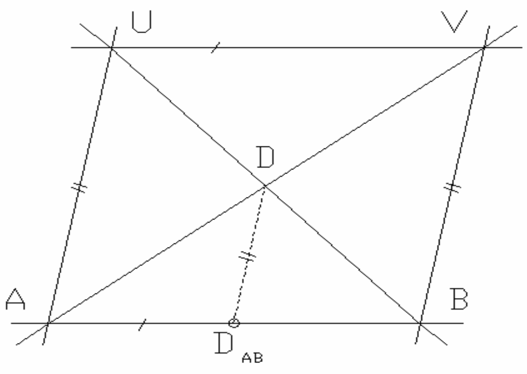
Svůj postup rozložíme na šest etap:

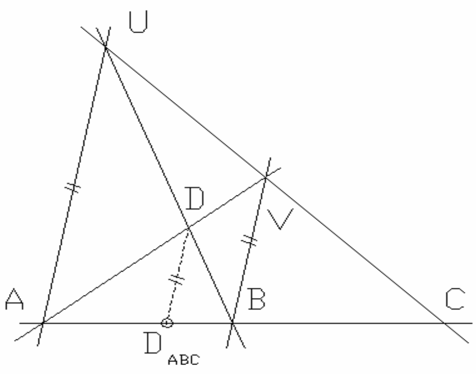
((1)) Jsou-li a, b rovnoběžné přímky, pak rovněž $\{X^{\alpha} \mid X \in a\}$, $\{Y^{\alpha} \mid Y \in b\}$ jsou rovnoběžné přímky.

((2)) Jsou-li A, B, C, D body, pak $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{A^{\alpha}B^{\alpha}} = \overrightarrow{C^{\alpha}D^{\alpha}}$, takže má smysl definovat přidružené zobrazení $\hat{\alpha}$.

((3)) Jsou-li **a, b** vektory, pak $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^{\hat{\alpha}} = \mathbf{a}^{\hat{\alpha}} + \mathbf{b}^{\hat{\alpha}}$ (*aditivnost* zobrazení $\hat{\alpha}$).

Definice: ζ_1 – konfigurace má *výchozí body* A, B, U neležící na téže přímce a její další body V, D, D_{AB} (*výsledný bod*) jsou sestrojeny takto: AB $\parallel$ UV, AU $\parallel$ BV, D = AV $\sqcap$ UB, $D_{AB} \in$ AB, $DD_{AB} \parallel$ AU.





Definice: ζ_2 – konfigurace má *výchozí body* A, B, C, U, kde body A, B, C jsou navzájem různé, C $\in$ AB, U $\notin$ AB, a další body V, D, D_{ABC} (*výsledný bod*) jsou sestrojeny takto: V $\in$ CU, BV $\parallel$ AU, D = AV $\sqcap$ BU, $D_{ABC} \in$ AB, $DD_{ABC} \parallel$ AU.

5) jiný název: automorfizmus, někdy též: (afinní) kolineace

((4)) a) Je-li (A, B, U, D_{AB}) ζ_1 – konfigurace, zvolíme-li libovolné umístění (P, $\mathbf{v}$) přímky AB a mají-li při něm body A, B souřadnice t_1, t_2, pak souřadnice bodu D_{AB} při tomto umístění je $\frac{t_1 + t_2}{2}$.

b) Je-li (A, B, C, U, D_{ABC}) ζ_2 – konfigurace a (P, $\mathbf{v}$) umístění na přímce AB takové, že body A, B, C mají při něm souřadnice $-t$, t, 1, pak bod D_{ABC} má při něm souřadnici t^2.

((5)) Jsou-li A, B různé body a zvolíme-li umístění (A, $\overrightarrow{AB}$), ($A^\alpha, \overrightarrow{A^\alpha B^\alpha}$) na přímkách AB, respektive $A^\alpha B^\alpha$, pak souřadnice libovolného bodu $P \in AB$ při (A, $\overrightarrow{AB}$) je táž jako souřadnice bodu P^α při ($A^\alpha, \overrightarrow{A^\alpha B^\alpha}$).

((6)) Je-li $\mathbf{v}$ vektor a t reálné číslo, pak $(t \cdot \mathbf{v})^{\hat{\alpha}} = t \cdot \mathbf{v}^{\hat{\alpha}}$ (*homogenita* zobrazení $\hat{\alpha}$).

Tvrzení (1), (2), a (3) se dokáží jednoduše. Klíčové okolnosti jsou však obsaženy ve tvrzení (4) a to pak dovoluje užít při důkazech tvrzení (5) a (6) standardní postup (viz kupř. [1], str. 45-47).

§3. Ad ((1)): Nechť p_1, p_2 jsou různé rovnoběžné přímky a nechť také $\{X^\alpha \mid X \in p_1\}$, $\{Y^\alpha \mid Y \in p_2\}$ jsou různoběžné přímky, s průsečíkem C. Potom $C^{\alpha^{-1}}$ je společný bod obou přímek p_1, p_2 a to je spor. Jak vyplývá z definice rovnoběžnosti, různé rovnoběžné přímky jsou nutně disjunktní: je-li A opěrný bod přímky p_1 a B opěrný bod přímky $p_2 \neq p_1$ při společném směrovém vektoru $\mathbf{v}$, pak společný bod P obou přímek p_1, p_2 by určoval vektory $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{BP}$ jako násobky vektoru $\mathbf{v}$ a bylo by $p_1 = p_2$, ve sporu s předpokladem.

Ad ((2)) *Rovnoběžníkem* budeme rozumět každou uspořádanou čtveřici bodů (A, B, C, D) takových, že $B \neq A \neq D \neq C \notin AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$.

Uvedeme několik základních vlastností rovnoběžníků:

(a_1) Platí-li $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $A \neq B$, $C \notin AB$, pak (A,B,C,D) je rovnoběžník.

(a_2) Je-li (A,B,C,D) rovnoběžník, pak $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

(b_1) Platí-li $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$, $A \neq B$, $A' \in AB$, pak existují body A'', B'' takové, že (A, B, B'', A''), (A', B', B'', A'') jsou rovnoběžníky.

(b_2) Jsou-li (A, B, B'', A''), (A', B', B'', A'') rovnoběžníky, kde $A' \in AB$, pak $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$.

Tyto vlastnosti plynou z věty: *Každý vektor* $\mathbf{v}$ *určuje afinitu, v níž každému bodu* X *odpovídá bod* X' *takový, že* $\overrightarrow{XX'} = \mathbf{v}$. *Je-li* $\mathbf{v}$ *vektor nenulový, nemá tato afinita žádný samodružný bod.*

Důkaz: Zobrazení je bijektivní, protože každý bod Y má svůj vzor $\widetilde{Y}$ takový, že $\overrightarrow{Y\widetilde{Y}} = -\mathbf{v}$. Je-li p přímka se směrovým vektorem $\mathbf{w}$, který není násobkem vektoru $\mathbf{v}$, a opěrným bodem P, pak P' je opěrný bod přímky se směrovým vektorem $\mathbf{w}$ a na ní leží obrazy X' všech bodů X přímky p. Je totiž $\overrightarrow{P'X'} = \overrightarrow{PX} - \overrightarrow{PP'} = \mathbf{w}$ podle rovnoběžníkového pravidla $\underbrace{\overrightarrow{PX}}_{\mathbf{w}'} + \underbrace{\overrightarrow{XX'}}_{\mathbf{v}} = \overrightarrow{PX'} = \underbrace{\overrightarrow{PP'}}_{\mathbf{v}} + \overrightarrow{P'X'}$ (neboť vektorové sčítání je komutativní). Je-li p přímka se směrovým vektorem $\mathbf{v}$, pak ovšem $X' \in p$ pro každé $X \in p$. Zakončení důkazu plyne z bijektivity vyšetřovaného zobrazení.

Afinita z předchozí věty se nazývá *translací*.

Přistupme k vlastnímu důkazu: tvrzení ((3)).

Nechť platí $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$, A = B. Pak též $\overrightarrow{A^{\alpha}B^{\alpha}} = \overrightarrow{A'^{\alpha}B'^{\alpha}}$. Pokud A = B, pak $A' = B'$, a tedy $\overrightarrow{A^{\alpha}B^{\alpha}} = \overrightarrow{A'^{\alpha}B'^{\alpha}}$.

Nechť platí $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$, A $\neq$ B. Pak též $A' \neq B'$. Nejprve předpokládejme, že $A' \notin AB$, takže (A, B, B', A') je rovnoběžník podle (a_1) a $(A^{\alpha}, B^{\alpha}, B'^{\alpha}, A'^{\alpha})$ je opět rovnoběžník vzhledem k tomu, že α je afinita. Podle (a_2) je pak $\overrightarrow{A^{\alpha}B^{\alpha}} = \overrightarrow{A'^{\alpha}B'^{\alpha}}$.

Ve druhém případě vyjděme z předpokladu $A' \in AB$. Využijeme existence pomocné dvojice bodů A'',B'' ,neležících na přímce AB a takových, že $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A''B''}$, a použijeme ($b_1$). Pak $(A^{\alpha}, B^{\alpha}, B''^{\alpha}, A''^{\alpha})$, $(B''^{\alpha}, A''^{\alpha}, A'^{\alpha}, B'^{\alpha})$ jsou opět rovnoběžníky vzhledem k tomu, že α je afinita. Podle (b_2) pak $\overrightarrow{A^{\alpha}B^{\alpha}} = \overrightarrow{A'^{\alpha}B'^{\alpha}}$.

Zopakujme definice ζ_1 - a ζ_2 - konfigurace:

ζ_1 – *konfigurace* má výchozí body A, B, U neležící na téže přímce a je tvořena dalšími body V, D, D_{AB} takovými, že (A,B,V,U) je rovnoběžník, D =AV $\sqcap$ BU, a výsledný bod $D_{AB} \in AB$ splňuje podmínku $DD_{AB} \parallel AU$.

ζ_2 – *konfigurace* má výchozí body A, B, C, U, z nichž A, B, C jsou navzájem různé body na téže přímce a bod U neleží na přímce AB, a je tvořena dalšími body V, D, D_{ABC} sestrojenými takto: V je ten bod přímky CU, pro nějž BV $\parallel$ AU, D = AV$\sqcap$ BU, a výsledný bod $D_{ABC} \in AB$ splňuje podmínku $DD_{ABC} \parallel AU$.

Zřejmě ζ_1 – konfigurace s výchozími body A, B, U a výsledným bodem D_{AB} přechází při afinitě α do ζ_1 – konfigurace s výchozími body A^{α}, B^{α}, C^{α} a výsledným bodem D^{α}_{AB}.

Rovněž ζ_2 – konfigurace s výchozími body A, B, C, U a výsledným bodem D_{ABC} přechází při afinitě α do ζ_2 – konfigurace s výchozími body A^{α}, B^{α}, C^{α}, U^{α} a výsledným bodem D^{α}_{ABC}.

Ad((4)): Zvolme vztažnou soustavu $\mathcal{R} = (0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ a body A, B, U o souřadnicích $(a, 0)$, $(b, 0)$, (a, u) vzhledem k $\mathcal{R}$. Předpokládejme, že $a \neq b$, $u \neq 0$. Při výchozích bodech A, B, U nechť D_{AB} je bod výsledný. Doplňme bod V tak, aby vznikl rovnoběžník (A,B,V,U) a stanovme průsečík D = AV $\sqcap$ BU. Pro přímku BU zvolme umístění (B, $\overrightarrow{BU}$). Bod V bude mít souřadnice (b, u) a na přímce AV zvolme umístění (A, $\overrightarrow{AV}$). Pro souřadnice d_1, d_2 bodu C bude pak platit:

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} + \tau_1 \begin{bmatrix} b-a \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} + \tau_2 \begin{bmatrix} b-a \\ -u \end{bmatrix}.$$

Odtud $\tau_1 u = -\tau_2 u$, $\tau_2 = -\tau_1$, a dále $a + \tau_1(b-a) = b - \tau_1(b-a)$, takže $\tau_1 = \frac{1}{2}$ a závěrem

$$d_1 = a + \frac{1}{2}(b-a) = \frac{1}{2}(a+b),\ d_2 = \frac{1}{2}u.$$

Vidíme, že výsledný bod D_{AB} ζ_1 – konfigurace (A, B, U, D_{AB}) má při umístění (O, $\mathbf{e}_1$) souřadnice rovné aritmetickému průměru souřadnic bodů A, B. Při daných bodech A, B tedy bod D_{AB} nezávisí na volbě bodu U $\notin$ AB.

Vztažná soustava $\mathcal{R} = (0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ nechť je nyní zvolena tak, že body A, B, C, U mají při ní souřadnice $(-b, 0)$, $(b, 0)$, $(1, 0)$, $(-b, u)$, kde $b \neq 0, -1, 1$ a rovněž $u \neq 0$. Při výchozích bodech A, B, C, U je bod D_{ABC} výsledný. Předně stanovíme bod V jako průsečík přímky CU s přímkou p jdoucí bodem B rovnoběžně s přímkou AU. Nakonec najdeme průsečík $D = AV \sqcap BU$ o souřadnicích d_1, d_2; souřadnice výsledného bodu D_{ABC} vyšetřované ζ_2 – konfigurace je pak též d_1. Očekáváme rovnost $d_1 = b^2$.

Pro přímku CU zvolme umístění $(C, \overrightarrow{CU})$, pro přímku p pak $(B, \mathbf{e}_2)$, takže pro souřadnice bodu $V = CU \sqcap p$ máme dvojí vyjádření: $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \tau_1 \begin{bmatrix}1+b\\-u\end{bmatrix}$ a $\begin{bmatrix}b\\0\end{bmatrix} + \tau_2 \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, kde

ovšem $\tau_2 = -\tau_1 u$. Tedy $1 + \tau_1(1+b) = b$, takže $\tau_1 = \dfrac{b-1}{b+1}$ (což je druhá souřadnice bodu V).

Dále vyjádříme dvojím způsobem souřadnice bodu $D = AV \sqcap BU$:

$$\begin{bmatrix}b\\0\end{bmatrix} + \sigma_1 \begin{bmatrix}2b\\-u\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}-b\\0\end{bmatrix} + \sigma_2 \begin{bmatrix}2b\\-\dfrac{b-1}{b+1}u\end{bmatrix},$$

takže $b + \sigma_1 2b = -b + \sigma_2 2b$, $-\sigma_1 u = -\sigma_2 \dfrac{b-1}{b+1} u$, po krácení pak $1 + 2\sigma_1 = -1 + 2\sigma_2$, $\sigma_1 = \dfrac{b-1}{b+1} u$.

Řešením rovnice $1 + 2\dfrac{b-1}{b+1}\sigma_2 = -1 + 2\sigma_2$ neboli $1 + \dfrac{b-1}{b+1}\sigma_2 = \sigma_2$ je $\sigma_2 = \dfrac{b+1}{2}$. Příslušná souřadnice d_1 pak vychází $-b + \dfrac{b+1}{2} 2b = b^2$, tak jak jsme očekávali. Vidíme, že při daných bodech A, B, C nezávisí výsledný bod D_{ABC} na volbě bodu $U \notin AB$.

Ad((5)): Vyšetřujme různé body A, B a přímku AB s umístěním $(A, \overrightarrow{AB})$. Souřadnice proměnného bodu $P \in AB$ vzhledem k $(A, \overrightarrow{AB})$ označme x_P a souřadnici bodu $P^\alpha \in A^\alpha B^\alpha$ vzhledem k $(A^\alpha, \overrightarrow{A^\alpha B^\alpha})$ x'_{P^α}. Je tím určeno zobrazení $\hat{\alpha} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_P \mapsto x'_{P^\alpha}$ (pro každé $P \in AB$). Zajisté jsou čísla 0,1 samodružná při $\hat{\alpha}$. Nechť tedy jsou P,Q libovolné vzájemně různé body přímky AB. Protože ζ_1- konfigurace o výchozích bodech P, Q, U určuje souřadnici $x_{D_{PQ}} = \dfrac{x_P + x_Q}{2}$ a převádí se při α na ζ_1-konfiguraci o výchozích bodech P^α, Q^α, U^α

určujících souřadnici $x'_{D_{P^\alpha Q^\alpha}} = \dfrac{x'_{P^\alpha} + x'_{Q^\alpha}}{2}$, dostáváme jako závěr

(1) $$\left(\frac{x+y}{2}\right)^{\hat{\alpha}} = \frac{x^{\hat{\alpha}}}{2} + \frac{y^{\hat{\alpha}}}{2} \qquad \text{pro všechna } x,y \in \mathbb{R};\ x \neq y.$$

Položíme-li zde $y := 0$, obdržíme (víme, že $0^{\hat{\alpha}} = 0$)

(2) $$\left(\frac{x}{2}\right)^{\hat{\alpha}} = \frac{x^{\hat{\alpha}}}{2} \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R} \qquad \text{(pro } x = 0 \text{ je tato rovnost triviální).}$$

Položíme-li zde $x := 2x$, obdržíme

(3) $$(2x)^{\hat\alpha} = 2x^{\hat\alpha} \text{ pro všechna } x \in \mathbb{R}.$$

Na základě (1) a (3) plyne tedy

(4) $$(x+y)^{\hat\alpha} = x^{\hat\alpha} + y^{\hat\alpha} \text{ pro všechna } x, y \in \mathbb{R}.$$

Volba $x + y = 0$ vede zde k rovnosti

(5) $$(-x)^{\hat\alpha} = -\left(x^{\hat\alpha}\right) \text{ pro všechna } x \in \mathbb{R}.$$

Nyní uplatníme ζ_2–konfiguraci o výchozích bodech P, Q, R takových, že $x_P = -x_Q$, $x_R = 1$, takže pro výsledný bod D_{PQR} platí: $x_{D_{PQR}} = x_P^2$. Při převodu afinitou α přejde tato ζ_2-konfigurace v ζ_2–konfiguraci o výchozích bodech P^α, Q^α, R^α o souřadnicích $x'_{P^\alpha} = -x'_{Q^\alpha}$, $x'_R = 1$ a výsledném bodu $D_{P^\alpha Q^\alpha R^\alpha}$ o souřadnici $x^2_{P^\alpha}$. Víme, že platí $1^{\hat\alpha} = 1$, takže závěrem máme

(6) $$\left(x^2\right)^{\hat\alpha} = \left(x^{\hat\alpha}\right)^2 \text{ pro všechna } x \in \mathbb{R}.$$

Položíme-li zde $x := x+y$, dostaneme s použitím (3), (4)

(7) $$(xy)^{\hat\alpha} = x^{\hat\alpha} y^{\hat\alpha} \text{ pro všechna } x, y \in \mathbb{R}.$$

Rovnost (6) má znamenitý důsledek pro $t = x^2$, že totiž pro každé nezáporné číslo $t \in \mathbb{R}$ je též $t^{\hat\alpha}$ číslo nezáporné.

(8) $$x \in \mathbb{R},\ x \geq 0 \text{ implikuje } x^{\hat\alpha} \geq 0.$$

Přitom lze provést rozlišení

(8′) $$\begin{cases} x \in \mathbb{R},\ x > 0 \text{ implikuje } x^{\hat\alpha} > 0 \\ x \in \mathbb{R},\ x \neq 0 \text{ implikuje } x^{\hat\alpha} \neq 0 \\ x \in \mathbb{R},\ x < 0 \text{ implikuje } x^{\hat\alpha} < 0. \end{cases}$$

Dále uplatněním (4), (5) dostaneme jako závěr rovnost $(x-y)^{\hat\alpha} = x^{\hat\alpha} - y^{\hat\alpha}$ pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$, takže pro $x > y$ máme $x - y > 0$, $(x-y)^{\hat\alpha} > 0$, a tedy $x^{\hat\alpha} > y^{\hat\alpha}$. Vidíme, že *zobrazení $\hat\alpha$ respektuje přirozené uspořádání reálných čísel.* Jsou-li *m*, *a* celá čísla, z nichž druhé je nenulové, pak s použitím rovností (4), (5), (7), (8) i toho, že číslo 1 je samodružné při $\hat\alpha$, dojdeme k závěru, že *každé racionální číslo je samodružné při* $\hat\alpha$. Jako důsledek *každé reálné číslo je při* $\hat\alpha$ *samodružné*. Odtud již plyne dokončení důkazu tvrzení ((5)).
Při důkazu byl zčásti použit klasický postup známý z rozboru von Staudtovy hlavní věty o harmonických čtveřicích (srv. [1], str. 45-47).

Ad ((6)): Jako důsledek tvrzení ((5)) dostáváme pro všechna $A, B \in \mathcal{P}$, $A \neq B$ a pro všechna $t \in \mathbb{R}$ rovnost $t \cdot \overrightarrow{A^\alpha B^\alpha} = \left(t \cdot \overrightarrow{AB}\right)^\alpha$, zatímco pro A = B platí tato rovnost triviálně.

§4. Je-li $(O, \overrightarrow{OE_1}, \overrightarrow{OE_2})$ vztažná soustava afinní roviny, pak zobrazení $\mathcal{P} \to \mathcal{P}$, $P \mapsto P'$, při němž $\overrightarrow{PP'}$ je pevný vektor **v**, se nazývá *translace*. Je to velmi speciální případ afinního zobrazení. Jsou li x_P, y_P, resp. $x_{P'}$, $y_{P'}$, souřadnice bodu P, resp. bodu P′, pak $x_{P'} = x_P + v_1$, $y_{P'} = y_P + v_2$, kde $\mathbf{v} = v_1 \cdot \overrightarrow{OE_1} + v_2 \cdot \overrightarrow{OE_2}$ .To ihned vyplývá z podmínky (ii).

Každé afinní zobrazení α lze vyjádřit jako složení afinního zobrazení β se samodružným bodem O a translace **a** převádějící bod O do bodu O^α. Má tedy zobrazení α: $\mathcal{P} \to \mathcal{P}$, $P \mapsto P'$ vyjádření $\begin{bmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$, kde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ je regulární reálná matice. Zobrazení β se totiž chová jako regulární lineární transformace prostoru **V** (zprostředkovaná přechodem od bodu k jeho polohovému vektoru).

Přitom je $x_{O'} = a_1$, $y_{O'} = a_2$, $x_{E_1'} = a_{11}$, $y_{E_1'} = a_{21}$, $x_{E_2'} = a_{12}$, $y_{E_2'} = a_{22}$, jak ihned vyplývá po dosazení do transformačních rovnic

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_1 ,$$
$$y' = a_{21}x + a_{22}y + a_2 ,$$

kde již nepíšeme indexy P, resp. P′, připojujeme však čárku vpravo nahoře v levých stranách rovnic.

Perspektivní afinita α s nevlastní osou a vlastním středem nechť má samodružný vlastní bod O. $(O, \overrightarrow{OE_1}, \overrightarrow{OE_2})$ nechť je vztažná soustava afinní roviny. Přitom nechť platí $\overrightarrow{OE_1'} = \lambda \cdot \overrightarrow{OE_1}$ pro nenulovou reálnou konstantu λ. Vzhledem k tomu, že $E_1E_2 \parallel E_1' E_2'$, je též $\overrightarrow{OE_2'} = \lambda \cdot \overrightarrow{OE_2}$, a tedy $\overrightarrow{OE_1'} = \lambda \cdot \overrightarrow{OE_1} + 0 \cdot \overrightarrow{OE_2}$, $\overrightarrow{OE_2'} = 0 \cdot \overrightarrow{OE_1} + \lambda \cdot \overrightarrow{OE_2}$. Z transformačních rovnic plyne pro odpovídající si body $O \mapsto O$, $E_1 \mapsto E_1'$, $E_2 \mapsto E_2'$ důsledek $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_{11} = \lambda$, $a_{12} = 0$, $a_{21} = 0$, $a_{22} = \lambda$.

Vyšetřujeme perspektivní afinitu α s vlastní osou a nevlastním středem neležícím na ose afinity. Vztažnou soustavu $(O, \overrightarrow{OE_1}, \overrightarrow{OE_2})$ volme tak, aby $\overrightarrow{OE_1}$ byla osa afinity a aby bodu E_1 odpovídal bod E_1' na přímce OE_1. Opět užijeme transformační rovnice. Vzhledem k tomu, že body O, E_1 jsou samodružné, máme $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_{11} = 1$, $a_{21} = 0$. A vzhledem k tomu, že bodu E_2 odpovídá bod E_2' o daných souřadnicích $0,\lambda$, máme $a_{12} = 0$, $a_{22} = \lambda$, takže matice **A** je zde tvaru $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$.

Nakonec vyšetřujeme perspektivní afinitu α s vlastní osou a nevlastním středem ležícím na ose afinity (elaci). Volme vztažnou soustavu $(O, \overrightarrow{OE_1}, \overrightarrow{OE_2})$ tak, že $\overrightarrow{OE_1}$ je osa afinity a bodu E_2 odpovídá bod E_2' o souřadnicích $\lambda,1$. Do třetice užijeme transformační rovnice. Vzhledem k tomu, že body O, E_1 jsou samodružné, máme opět $a_1 = a_2 = 0$, $a_{11} = 1$, $a_{21} = 0$. Vzhledem k tomu, že bodu E_2 odpovídá bod E_2' máme $a_{12} = \lambda$, $a_{22} = 1$. Příslušná matice **A** je zde tvaru $\begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Literatura:

[1] W. Blaschke, Projektive Geometrie, Basel-Stuttgart, 1954

[2] Б. Н. Делоне, Краткое изложение доказательства непротиворечивости планиметрии Лобачевского, Москва, 1967

[3] G. Pickert, Analytische Geometrie, Leipzig, 1967

[4] А. В. Погорелов, Основания геометрии, Москва, 1955

[5] P. B. Yale, Geometry and Symmetry, San Francisco-Cambridge-London-Amsterdam, 1968

[6] E. Snapper, Metric Geometry over Affine Spaces, Math. Assoc. Am., Buffalo, N.Y., 1964 (notes taken by J. T. Buckey at the first MAA Cooperative Summer Seminar in 1964 at Cornell University), with Appendix by Ebey

Adresy autorů: havel@feec.vutbr.cz
vladimir.sedlar@math.slu.cz

To the fundamental theorem of real affine plane geometry

by V.Havel and V.Sedlář

Summary

There is investigated the theorem saying that every automorphism (affinity) of a real affine plane induces a nonsingular linear transformation of the underlying vector space of translations. The present Contribution contains a proof which as far as possible gets out of the means of Projective geometry.