$$\underbrace{X_1 + X_2}_{Y}$$

X_1, X_2 nezávislé, s hustotami $f_1(x), f_2(x)$

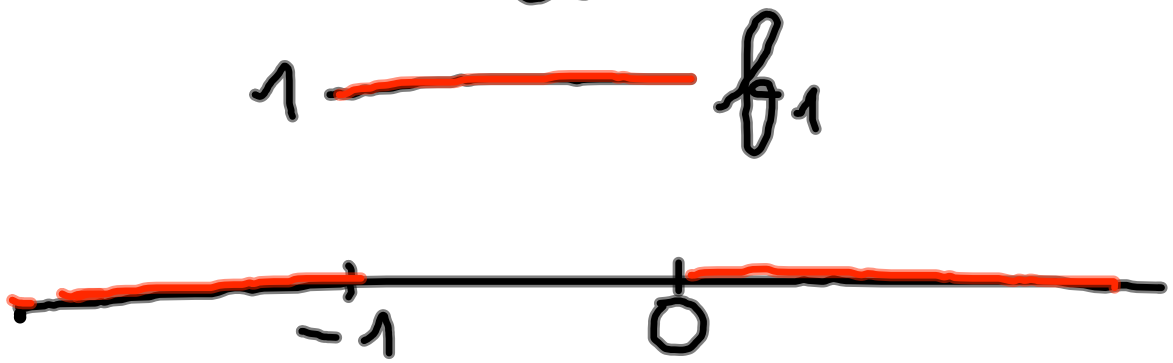
$$\boxed{f(y) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_1(y-x) f_2(x)\, dx}_{f_1 * f_2}}$$

Př. X … rovnoměrně rozdělená na $(-1,0)$

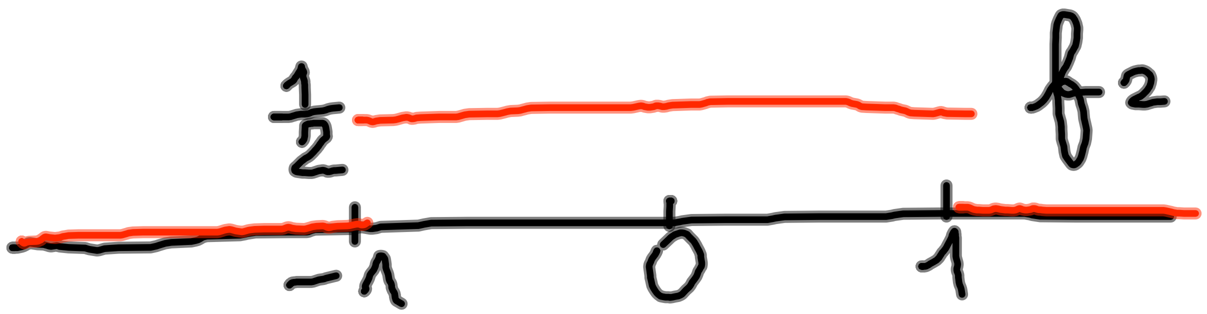
Y … rovnoměrné rozdělení na $(-1,1)$

hustotu $X+Y$

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{f_1(y-x)}\, \underline{f_2(x)}\, dx =$$

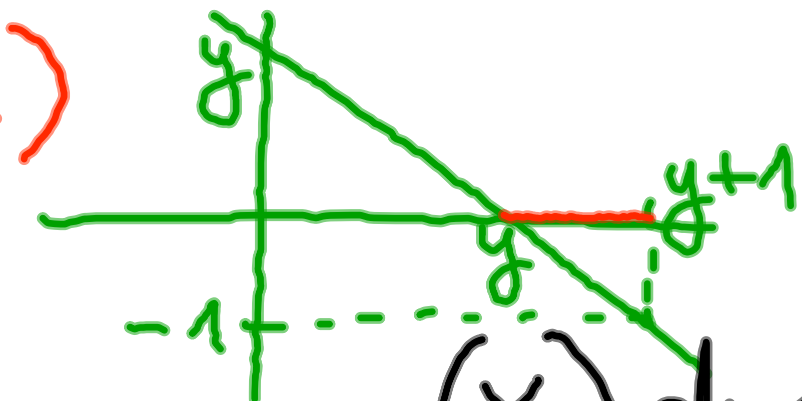


$$f_1(x) = \chi_{[-1,0]}(x)$$

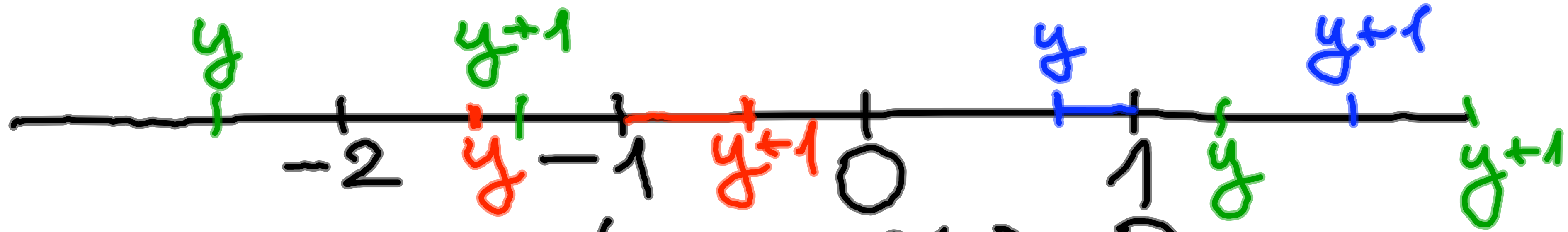


$$f_2(x) = \frac{1}{2}\chi_{[-1,1]}(x)$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\chi_{[-1,0]}(y-x)}_{\chi_{[y,y+1]}(x)}\, \chi_{[-1,1]}(x)\,dx$$



$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \chi_{\underbrace{[y,y+1]\cap[-1,1]}_{E}}(x)\,dx$$



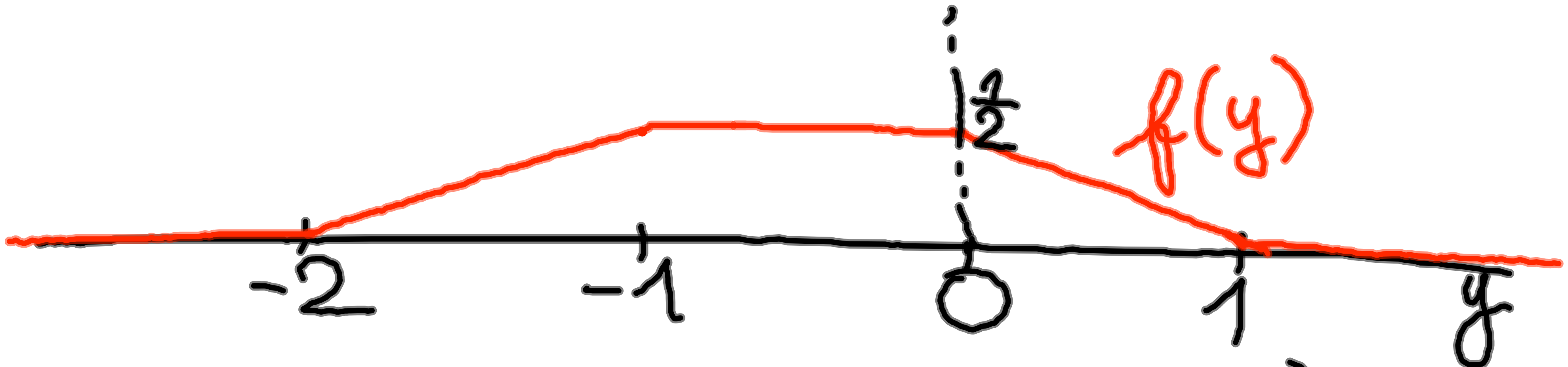
$y < -2 \quad E = \emptyset \quad f(y) = 0$

$y > 1 \quad E = \emptyset \quad f(y) = 0$

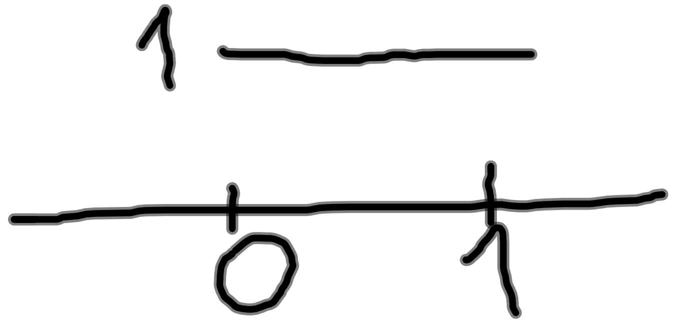
$-2 \leq y \leq -1 \quad E = [-1, y+1] \quad f(y) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{y+1} dx = \underline{\frac{1}{2}y+1}$

$-1 \leq y \leq 0 \quad E = [y, y+1] \quad f(y) = \frac{1}{2}\int_{y}^{y+1} dx = \underline{\frac{1}{2}}$

$0 \leq y \leq 1 \quad E = [y, 1] \quad f(y) = \frac{1}{2}\int_{y}^{1} dx = \underline{-\frac{y}{2} + \frac{1}{2}}$



X



$(\underbrace{X-1})$

$\underbrace{2X-1}$

Speciální rozdělení pravděpodobnosti

$X \sim N(0,1)$

$Y_1 = X^2$

$$G(y) = P(Y_1 < y) = P(X^2 < y)$$

$$= P(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}) =$$

$$= \Phi(\sqrt{y}) - \underbrace{\Phi(-\sqrt{y})}_{1-\Phi(\sqrt{y})} = \boxed{2\Phi(\sqrt{y}) - 1}$$

$$g(y) = 2\frac{1}{2\sqrt{y}}\varphi(\sqrt{y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2}}$$

hustota $\chi^2(1)$

chí kvadrát

s 1 stupněm volnosti

$X_1, X_2 \sim N(0,1)$ nezávislé

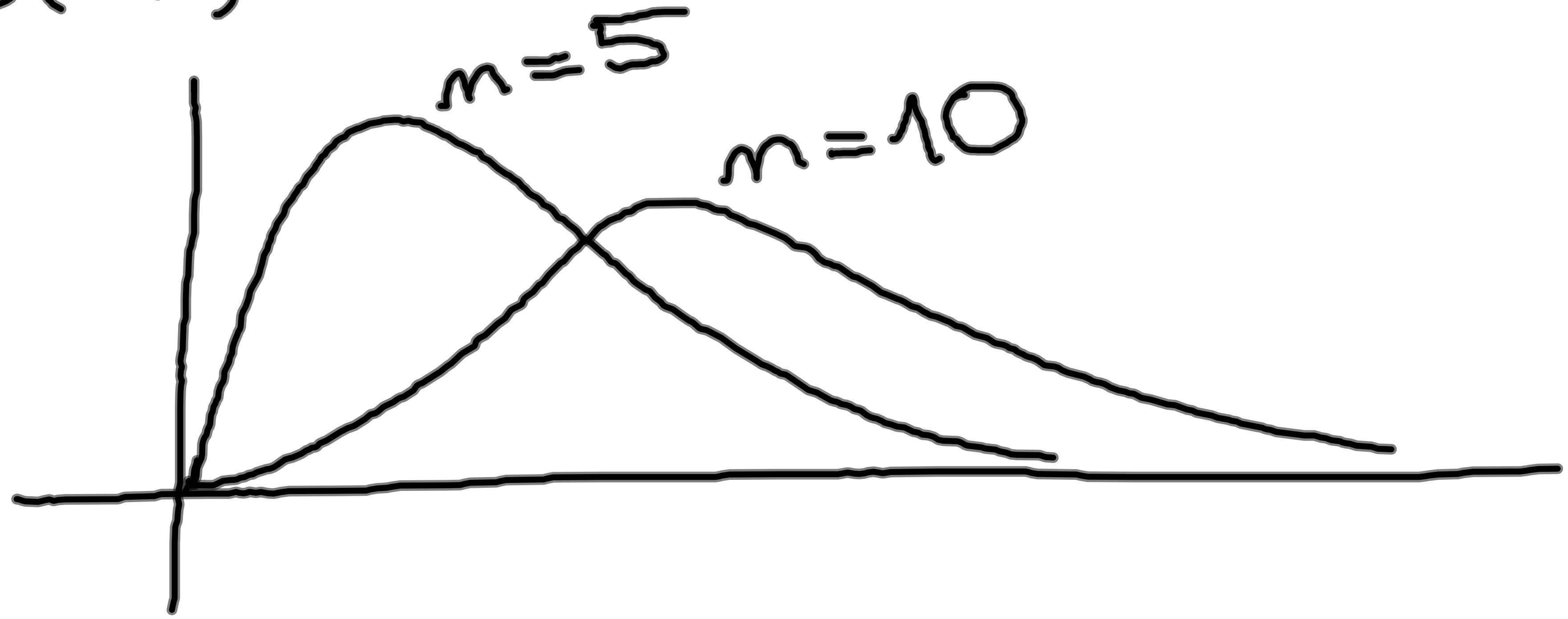
$Y_2 = X_1^2 + X_2^2 \quad \chi^2(2)$

$X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(0,1)$ nezávislé

$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \dots f_n(x_n)$

$Y_n = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 \quad \chi^2(n)$

$f(x) =$



Studentovo rozdělení pravděpodobnosti

X, Y jsou nezávislé n. p.

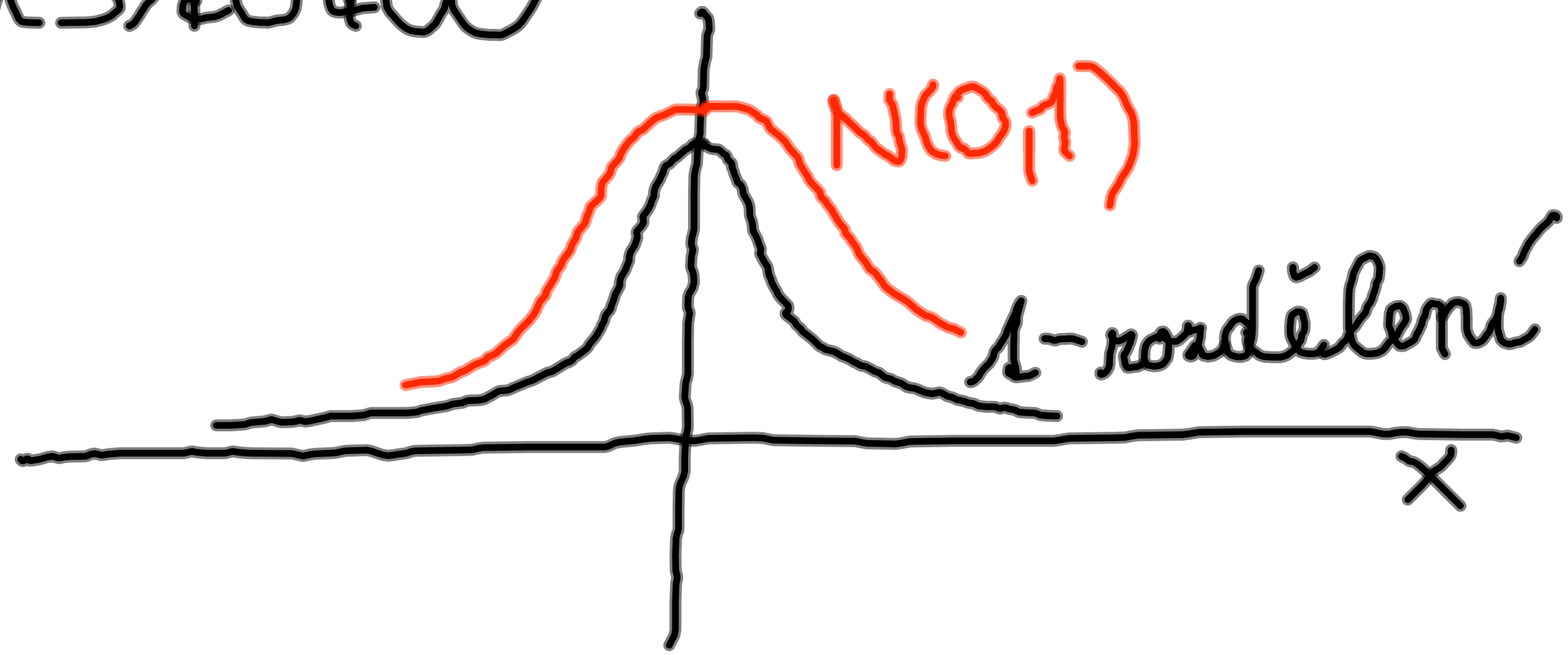
$X \sim N(0,1)$

$Y \sim \chi^2(n)$

Potom:

$$\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$$ má tzv. Studentovo t-rozdělení s n stupni volnosti

hustota



$\underline{X}_1, \underline{X}_2, \underline{\ldots}, \underline{X}_n$ <u>nezávislé</u>
na $(\Omega, \mathcal{S}, P)$
nechť mají <u>stejné rozdělení pravděpodobnosti</u>
(stejnou disbribuční funkci)

$$\sum_{i=1}^{n} X_i$$

ozn. $E(X_i) = a$

$D(X_i) = \sigma^2$

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \overbrace{E(X_i)}^{a} = na$$

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) = n\sigma^2$$

$$\left(\begin{array}{l} X \\ E(X) = a \\ D(X) = \sigma^2 \\ U = \dfrac{X - a}{\sigma} \\ E(U) = 0 \\ D(U) = 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n} \boxed{X_i} - na}{\sqrt{n}\,\sigma} \xrightarrow{n \to \infty} \underline{N(0,1)}$$

má střední hodnotu $= 0$

a rozptyl $= 1$

Centrální limitní věta:

Nechť $\{X_n\}$, $n \in N$, je posl. nezávislých n. p. se stejným rozdělením pravděpodobnosti, se střední hodnotou $E(X_n) = a$, rozptylem $D(X_n) = \sigma^2$

Potom: $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - na}{\sqrt{n}\,\sigma}}_{} < x\right) = \underbrace{\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt}_{\Phi(x)}$$

konvergence v distribuci