$$(\Omega, \mathcal{F}, P)$$

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$$

$\sigma \mathbb{R}$ $\quad (0, x)$ $\quad [a, b)$ $\quad [x, \infty)$

$x \in \mathbb{R}$ $\quad (a, b)$ $\quad \{x_0\}$

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad F(x) = P(X < x)$$

Diskrétní náhodná proměnná

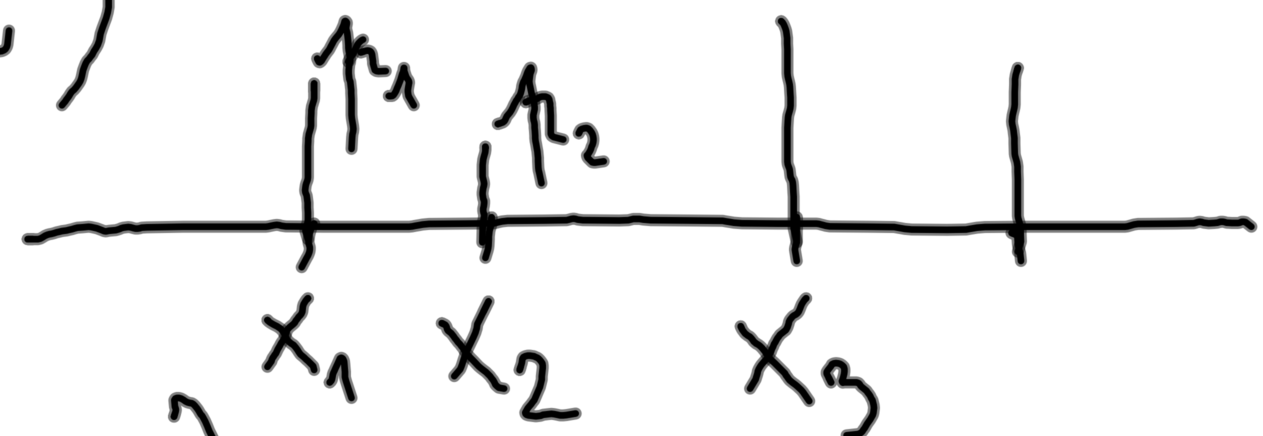
nejvýše spočetná množina hodnot

Rozdělení pravděpodobnosti lze popsat: 1. Distribuční fce

2. Pravděpodobnostní funkce

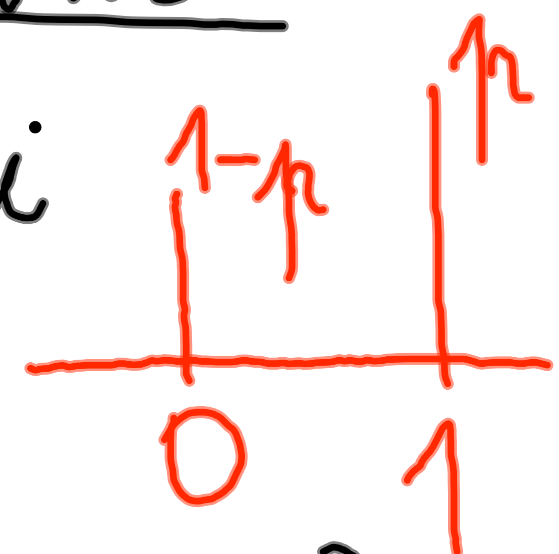
$\{x_1, x_2, \dots\}$

$P(X = x_i)$



$$\sum_i P(X = x_i) = 1$$

<u>**Def.**</u> X má <u>alternativní</u> rozdělení pravděpodobnosti s parametrem $p \in (0,1)$, je-li množina hodnot $\{0,1\}$ a $P(X=1)=p$, $P(X=0)=1-p$



$P(X=1)=P(X=0)=\frac{1}{2}$

Def. X má binomické rozdělení s parametry $n \in \mathbb{N}$ a $p \in (0,1)$, je-li množina hodnot $\{1, 2, \dots, n\}$

a $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$$\sum_{k=1}^{n} P(X=k) = 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (\underbrace{p+(1-p)}_{=1})^n$$

binomická věta

<u>Def.</u> X má rozdělení <u>spojitého typu</u> (spojitá), existuje-li nezáporná <u>reálná f</u>

$\forall x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

f ... hustota pravděpodobnosti

Distribuční funkce F spojité náhodné proměnné X je spojitá.

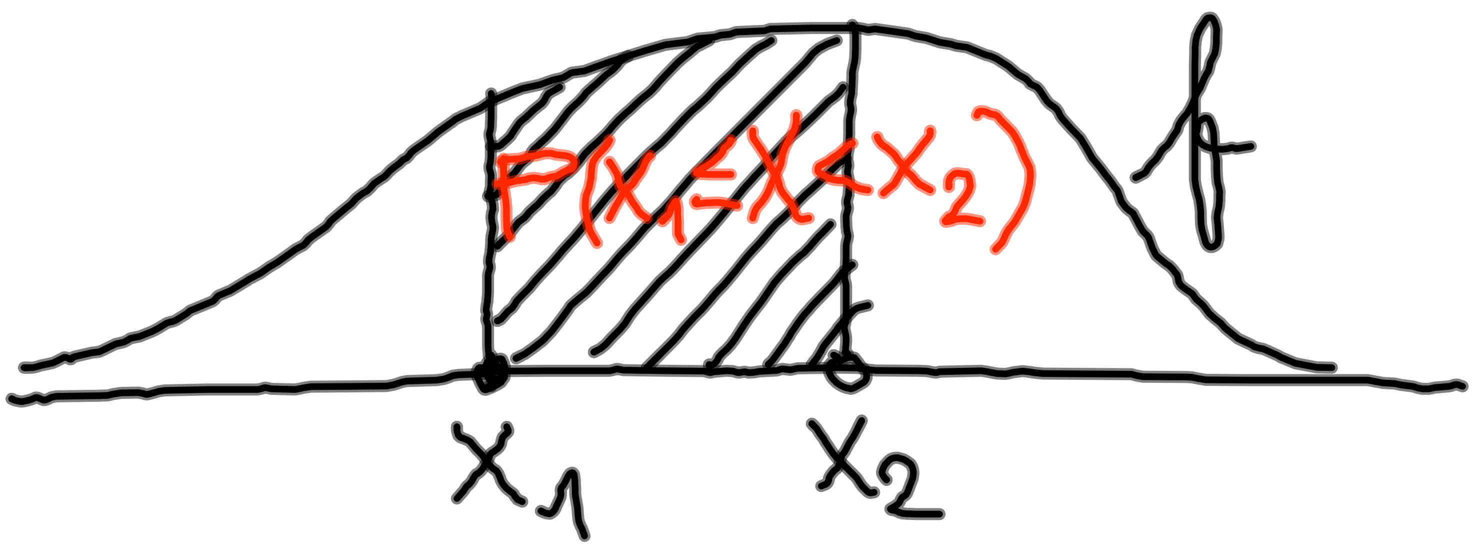
$$\frac{dF}{dx} = f$$

$$P(\underbrace{x_1 \le X < x_2}_{X \in [x_1, x_2)}) = P(X < x_2) - \underbrace{P(X < x_1)}_{F(x_1)}$$

$$= \underbrace{F(x_2)}\; - F(x_1) =$$

$$= \int_{-\infty}^{x_2} f(t)\,dt - \int_{-\infty}^{x_1} f(t)\,dt =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

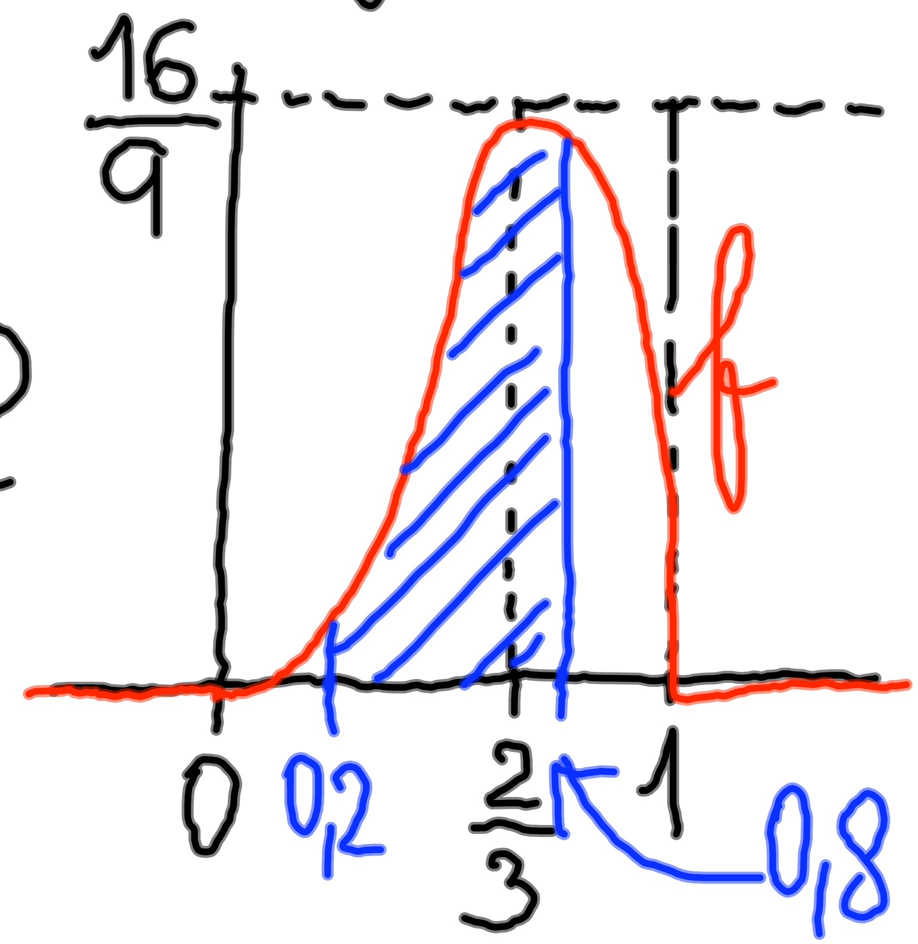
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{x \to \infty} \overbrace{\int_{-\infty}^{x} f(s)\,ds}^{F(x)} = 1$$

Př. X má hustotu

$$f(x)=\begin{cases} 12x^2(1-x) & 0<x<1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$F(x) = ?$

$P(0{,}2 \leq X < 0{,}8) = ?$



$$f(x)=\begin{cases}12x^2(1-x) & 0<x<1\\ 0 & \text{jinak}\end{cases}$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$x\le 0$ $\quad F(x)=0$

$0<x\le 1$ $\quad F(x)=\int_0^x 12t^2(1-t)\,dt = 4x^3-3x^4$

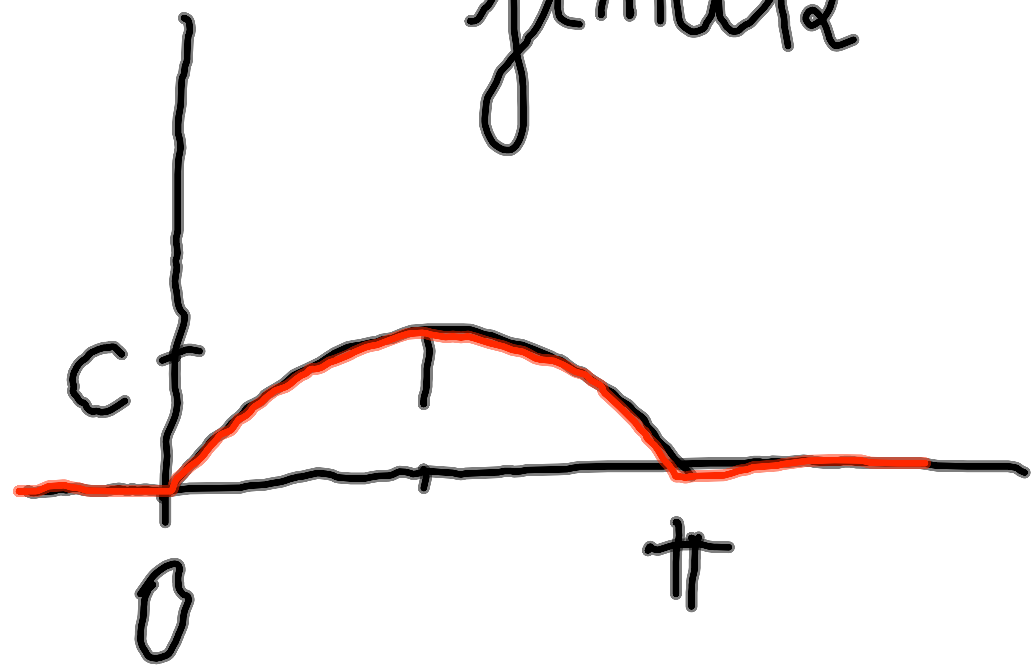
$x\ge 1$ $\quad F(x)=1$

F

Najděte hustotu

$$f(x)=\begin{cases} \boxed{c}\,\underline{\sin x} & \text{pro } x\in(0,\pi) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$



Tvrzení: X je spojitá

Potom $\forall x_0 \in \mathbb{R}$:

$$P(X = x_0) = 0$$

Důkaz: $A_n = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in [x_0, x_0 + \frac{1}{n})\}$, $n = 1, 2, \dots$

Platí: Je-li $B_n \in \mathcal{S}$, $B_n \supset B_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$

potom:

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n \to \infty} P(B_n)$$

$$A_n \in \mathcal{S},\quad A_n \supset A_{n+1},\quad [\quad)$$

$$n = 1, 2, \dots$$

$$\underline{P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)} = \; = \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x_0+\frac{1}{n}} f(x)\,dx = 0 \qquad \square$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_0\} \in \mathcal{S}$$

$$P(X = x_0) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) =$$

Důsledek: X spojitá

$$\underbrace{P(x_1 \le X < x_2)}_{X \in [x_1, x_2)} = \underbrace{P(x_1 < X < x_2)}_{X \in (x_1, x_2)} =$$

$$= \underbrace{P(x_1 < X \le x_2)}_{X \in (x_1, x_2]} = \underbrace{P(x_1 \le X \le x_2)}_{X \in [x_1, x_2]}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$